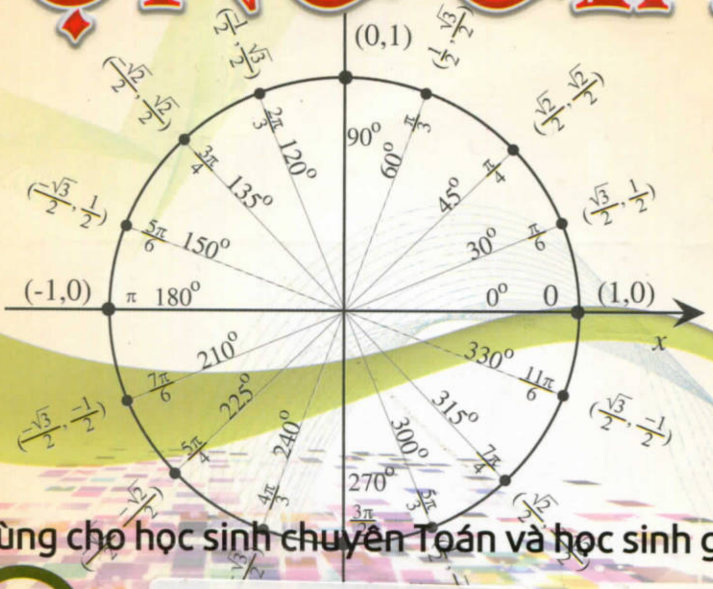
516.24076
B452D

TRƯỜNG TRUNG HỌC QUỐC GIA CHU VĂN AN

PHAN HUY KHẢI (Chủ biên)
CHỬ XUÂN DŨNG - HOÀNG VĂN PHÚ - CÙ PHƯƠNG ANH

Bồi dưỡng HỌC SINH GIỎI LƯỢNG GIÁC


(0,1)
(1,0)
(-1,0)
x
$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
$(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
$(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$
$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$
$(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$
$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$
90°
60°
45°
30°
0°
0
120°
135°
150°
180°
210°
225°
240°
270°
300°
315°
330°
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
π
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{6}$

Tài liệu dùng cho học sinh chuyên Toán và học sinh giỏi.

DVL.013498

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

B452D

TRƯỜNG TRUNG HỌC QUỐC GIA CHU VĂN AN

PHAN HUY KHẢI (Chủ biên)
CHỬ XUÂN DŨNG - HOÀNG VĂN PHÚ - CÙ PHƯƠNG ANH

Bồi dưỡng
HỌC SINH GIỎI
LƯỢNG GIÁC

Tài liệu dùng cho học sinh chuyên Toán và học sinh giỏi.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
DVL 13498 14

KHANG VIỆT

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Bồi dưỡng học sinh giỏi Lượng giác là quyển sách mở đầu trong bộ sách viết cho học sinh chuyên Toán và bồi dưỡng học sinh giỏi về môn Toán của nhóm giáo viên trường Trung học Quốc gia Chu Văn An.

Quyển sách gồm 5 chương:

- Chương 1: Đẳng thức lượng giác.
- Chương 2: Bất đẳng thức lượng giác.
- Chương 3: Đẳng thức lượng giác trong tam giác.
- Chương 4: Bất đẳng thức trong tam giác.
- Chương 5: Vài ứng dụng của lượng giác trong việc giải các bài toán sơ cấp.

Cuốn sách này sẽ cung cấp cho bạn đọc một số lượng rất lớn các bài toán chọn lọc gồm đủ thể loại. Mỗi phần của cuốn sách có thể xem như một chuyên đề riêng trình bày trọn vẹn một vấn đề một cách hoàn chỉnh (riêng phần phương trình lượng giác sẽ được đề cập trong cuốn khác).

Ngoài việc hệ thống và phân loại bài tập, chúng tôi luôn chú ý về việc phát triển một bài tập theo các hướng tổng quát hóa, đặc biệt hóa và so sánh bình luận các phương pháp giải khác nhau. Trong một chừng mực nhất định chúng tôi mạnh dạn đưa ra các giải pháp về khía cạnh sư phạm để dùng cuốn sách này. Vì lẽ đó cuốn sách này sẽ là một tài liệu tốt để các bạn giáo viên tham khảo vào mục đích dạy cho học sinh một cách tư duy một bài toán (chứ không đơn thuần giảng dạy cho học sinh hiểu một bài toán cụ thể).

Cần nhấn mạnh thêm rằng trong cuốn sách này dành một phần để trình bày cách thiết lập các hệ thức lượng giác trong tam giác dựa vào mối quan hệ giữa các yếu tố của một tam giác với các nghiệm của một phương trình bậc ba tương ứng. Theo quan niệm của chúng tôi đây là một trong những phần đặc sắc của cuốn sách.

Mặc dù hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn cuốn sách, nhưng với một dung lượng quá lớn cần truyền tải cho bạn đọc nên cuốn sách không thể tránh khỏi những khiếm khuyết.

Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc để cuốn sách hoàn thiện hơn nữa trong các lần tái bản sau.

Thư từ góp ý xin gửi về
Phan Huy Khải
Trường Trung học Quốc gia Chu Văn An.
10 – phố Thụy Khuê – quận Tây Hồ – Hà Nội
Xin chân thành cảm ơn!

Các tác giả

Chương 1. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§ 1. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Các hệ thức lượng giác cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\qquad$ $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad$ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. Các công thức cộng cung:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$.

3. Các công thức nhân cung:

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\tan3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$.

4. Các công thức biến tổng thành tích

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

5. Các công thức biến tích thành tổng

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

6. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt

– Hai góc đối nhau:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$

– Hai góc bù nhau

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$

– Hai góc phụ nhau

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha.$

– Hai góc hơn nhau π

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha.$

§ 2. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KHÔNG ĐIỀU KIỆN

Các bài toán trong mục này có dạng sau đây: Chứng minh các hệ thức lượng giác không có kèm theo điều kiện gì.

Phương pháp giải các bài toán này thuần túy dựa vào các phép biến đổi lượng giác.

Bài 1.

1. Chứng minh rằng $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
2. Chứng minh $\sin 1^0$ là số vô tỉ.

Giải

1. Ta có: $\sin 54^0 = \cos 36^0$

$\Leftrightarrow 3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0 = 1 - 2\sin^2 18^0$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 18^0 - 2\sin^2 18^0 - 3\sin 18^0 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 18^0 - 1)(4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1) = 0.$ (1)

Do $0^0 < 18^0 < 90^0 \Rightarrow 0 < \sin 18^0 < 1$, nên

$(1) \Leftrightarrow 4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0.$ (2)

Lại từ $0 < \sin 18^0 < 1$, nên từ (2) suy ra $\sin 18^0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow$ đpcm.

2. Áp dụng công thức $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, và giả thiết phản chứng $\sin 1^0$ là số hữu tỉ, khi đó theo tính chất của các phép tính với số hữu tỉ suy ra $\sin 3^0$, $\sin 9^0$, $\sin 27^0$, $\sin 81^0$ là số hữu tỉ.

Do $\sin 81^0 = \cos 9^0$ và $\sin 18^0 = 2\sin 9^0\cos 9^0$, nên suy ra $\sin 18^0$ là số hữu tỉ. Từ phần 1/ ta có: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ là số hữu tỉ, tức là $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \dfrac{p}{q}$ với $p,q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt{5} = 4\dfrac{p}{q} + 1$, vậy $\sqrt{5}$ là số hữu tỉ.

Đó là điều vô lí vì $\sqrt{5}$ như đã biết là số vô tỉ. Vậy giả thiết phản chứng là sai, nên $\sin 1^0$ là số vô tỉ $\Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét:

1. Bằng cách sử dụng công thức: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$,

   Với phép giải tương tự, ta chứng minh được $\cos 1^0$ là số vô tỉ.

2. Bây giờ xét bài toán sau:

   Chứng minh rằng $\cos 20^9$ là số vô tỉ. Khi đó cách giải hoàn toàn khác cách giải trên.

   Áp dụng công thức: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

   $\Rightarrow 8\cos^3 20 - 6\cos 20 - 1 = 0.$

   Thay $\alpha = 20^0$, ta có: $\frac{1}{2} = 4\cos^3 20^0 - 3\cos 20^0$

   $\Rightarrow 8\cos^3 20 - 6\cos 20 - 1 = 0.$

   Vậy $\cos 20^0$ là nghiệm của phương trình $8x^3 - 6x - 1 = 0.$ (3)

   Ta có kết quả quen biết sau trong lí thuyết đa thức.

   Xét phương trình đa thức: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0 = 0,$ (4)

   Trong đó a_i là số nguyên với mọi $i = 0, 1, 2,...,n.$

   Gọi P là tập hợp tất cả các ước của a_0 còn Q là tập hợp tất cả các ước của a_n.

   Khi đó nếu (4) có nghiệm hữu tỉ, thì nghiệm đó phải có dạng

   $x = \frac{p}{q}$, với $p \in P$, $q \in Q$.

   Áp dụng vào (3), ta thấy mọi nghiệm hữu tỉ của (3) nếu có, thì chúng đều thuộc vào tập hợp sau:

   $\Omega = \{\pm 1/8;\ \pm 1/4;\ \pm 1/2;\ \pm 1\}.$

   Tuy nhiên bằng cách thử trực tiếp ta thấy mọi phần tử của Ω đều không phải là nghiệm của (3). Nói cách khác mọi nghiệm của (3) đều là số vô tỉ. Vì $\cos 20^0$ là một nghiệm của (3) nên $\cos 20^0$ là số vô tỉ. Đó là đpcm.

Bài 2. Chứng minh:

$$4\cos 36^0 + \cot 7^0 30' = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

Giải

Theo bài 1, ta có $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

$$\Rightarrow \cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = 1 - 2\frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16}$$

$$\Rightarrow 4\cos 36^0 = 4 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{2} = \sqrt{5} + 1. \qquad (1)$$

Áp dụng công thức: Nếu $0 < \alpha < 90^0$, thì $\cot\frac{\alpha}{2} = \cot\alpha + \sqrt{1 + \cot^2\alpha}$, ta có:

$$\cot 7^0 30' = \cot 15^0 + \sqrt{1 + \cot^2 15^0}. \qquad (2)$$

Vì $\cot 15^0 = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^0}{1 - \cos 30^0}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3}$, nên thay vào (2) và

có: $\cos 7^0 30' = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{1 + 4 + 3 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$

$$= 2 + \sqrt{3} + \sqrt{\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}. \qquad (3)$$

Từ (1), (3) suy ra:

$4\cos 36^0 + \cot 7^0 30' = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} \Rightarrow$ đpcm.

Chú ý: Dễ thấy:

$$\cot\alpha + \sqrt{1 + \cot^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$\tan^2 10^0 + \tan^2 50^0 + \tan^2 70^0 = 9$

Giải

Áp dụng công thức $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, thì đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức sau:

$$\frac{1}{\cos^2 10^0} + \frac{1}{\cos^2 50^0} + \frac{1}{\cos^2 70} = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos^2 50^0\cos^2 70^0 + \cos^2 10\cos^2 70^0 + \cos^2 10\cos^2 50}{\cos^2 10^0\cos^2 50^0\cos^2 70^0} = 12. \qquad (1)$$

Gọi A và B tương ứng là tử số và mẫu số của vế trái của (1), ta có:

$A = \cos^2(60^0 - 10^0)\cos^2(60^0 + 10^0) + \cos^2 10^0[\cos^2(60^0 + 10^0) + \cos^2(60^0 - 10^0)]$

$= [(\cos 60\cos 10 + \sin 60\sin 10)(\cos 60\cos 10 - \sin 60\sin 10)]^2$

$\quad + \cos^2 10^0[(\cos 60\cos 10 - \sin 60\sin 10)^2 + (\cos 60\cos 10 + \sin 60\sin 10)^2]$

$= (\cos^2 60\cos^2 10 - \sin^2 60\sin^2 10)^2 + \cos^2 10^0(2\cos^2 60^0\cos^2 10^0 + 2\sin^2 60\sin^2 10^0)$

$$= \left(\frac{1}{4}\cos^2 10 - \frac{3}{4}\sin^2 10\right)^2 + \cos^2 10^0\left(\frac{1}{2}\cos^2 10 + \frac{3}{2}\sin^2 10\right)$$

$$= \left(\cos^2 10 - \frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 10^0\left(\frac{3}{2} - \cos^2 10^0\right) = \frac{9}{16}. \qquad (2)$$

Mặt khác tương tự như biến đổi A, ta cũng có:

$$B = \cos^2 10^0 \cos^2(60^0 - 10)\cos^2(60 + 10)$$

$$= \cos^2 10^0(\cos^2 60\cos^2 10 - \sin^2 60\sin^2 10)^2$$

$$= \cos^2 10\left(\cos^2 10 - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\cos^3 10 - \frac{3}{4}\cos 10\right)^2 = \frac{1}{16}\left(4\cos^3 10^0 - 3\cos 10^0\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}(\cos 30^0)^2 \text{ (do } \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{16}.\frac{3}{4} = \frac{3}{64} \qquad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra: $\text{VT (1)} = \dfrac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{64}} = 12$

Vậy (1) đúng ⇒ đpcm

Nhận xét:

Xét các cách giải khác thí dụ trên sau đây:

Cách 2: Áp dụng công thức: $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$, ta có:

$$\tan^2 3\alpha = \frac{9\tan^2\alpha - 6\tan^4\alpha + \tan^6\alpha}{1 - 6\tan^2\alpha + 9\tan^2\alpha} \qquad (4)$$

Vì $\tan^2 30 = \tan^2 150 = \tan^2 210 = \dfrac{1}{3}$, nên từ (4) suy ra khi thay $\alpha = 10^0$, ta có:

$$\frac{1}{3} = \frac{9\tan^2 10^0 - 6\tan^4 10^0 + \tan^6 10^0}{1 - 6\tan^2 10 + 9\tan^4 10^0},$$

hay $3\tan^6 10^0 - 27\tan^4 10^0 + 33\tan^2 10^0 - 1 = 0$. (5)

Từ (5) suy ra $\tan^2 10^0$ là nghiệm của phương trình:

$3x^3 - 27x^2 + 33x - 1 = 0$. (6)

Tương tự $\tan^2 50$, $\tan^2 70$ cũng là nghiệm của (6)

Mặt khác dễ thấy $\tan^2 10^0$, $\tan^2 50^0$, $\tan^2 70$ là ba số khác nhau (cụ thể ta có $\tan^2 10 < \tan^2 50 < \tan^2 70$), nên $\tan^2 10$, $\tan^2 50$, $\tan^2 70$ là ba nghiệm khác nhau của (6).

Theo định lí Viet với phương trình bậc ba, ta có:

$$\tan^2 10^0 + \tan^2 50 + \tan^2 70 = -\left(-\frac{27}{3}\right) = 9 \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Chú ý: Xin nhắc lại với phương trình bậc ba:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0)$

ta có định lí Viet sau:

Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của nó, thì ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Cách 3: Đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức sau:

$$\tan^2 10^0 + \tan^2 50^0 + \tan^2 70 = 3\tan^2 60^0$$

$$\Leftrightarrow (\tan^2 60 - \tan^2 10) + (\tan^2 60 - \tan^2 50) + (\tan^2 60 - \tan^2 70^0) = 0 \qquad (7)$$

Áp dụng công thức:

$$\tan^2\alpha - \tan^2\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta},$$

và chú ý rằng $\cos^2 60^0 = \dfrac{1}{4}$, nên dễ thấy

$$(7) \Leftrightarrow \frac{4\sin 50^0\sin 70^0}{\cos^2 10} + \frac{4\sin 10^0\sin 110^0}{\cos^2 50^0} + \frac{4\sin(-10^0)\sin 130^0}{\cos 70^0} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 50^0\sin 70^0\cos 50^0\cos 70^0 + 4\sin 10^0\sin 110^0\cos^2 10\cos^2 70^0$$
$$- 4\sin 10^0\sin 130^0\cos^2 10\cos^2 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 100^0\sin 140^0\cos 50\cos 70 + \sin 20\sin 140^0\cos 10\cos 70$$
$$- \sin 20\sin 100\cos 10\cos 50 = 0$$

(do $\sin 110 = \sin 70$; $\sin 130 = \sin 50$ và $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$)

$$\Leftrightarrow \cos 10\cos 70\cos^2 50 + \cos 10\cos 50\cos^2 70 - \cos 50\cos 70\cos^2 10 = 0 \qquad (8)$$

(do $\sin 100 = \cos 10$; $\sin 140 = \cos 50$; $\sin 20 = \cos 70$; $\sin 140 = \cos 50$;...)

Do $\cos 10\cos 70\cos 50 \neq 0$, nên

$$(8) \Leftrightarrow \cos 50 + \cos 70 - \cos 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 60\cos 10 - \cos 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos 10 - \cos 10 = 0. \qquad (9)$$

Vì (9) đúng nên (7) đúng ⇒ đpcm.

Cách 4: Áp dụng công thức: $\tan^2\alpha = 1 - \dfrac{2\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$, thì đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức sau:

$$\frac{\tan 10}{\tan 20} + \frac{\tan 50}{\tan 100} + \frac{\tan 70}{\tan 140} = -3 \qquad (10)$$

Rõ ràng (10) $\Leftrightarrow \dfrac{\tan 50}{\tan 80} + \dfrac{\tan 70}{\tan 40} - \dfrac{\tan 10}{\tan 20} = 3$

$\Leftrightarrow \tan 50\tan 40\tan 20 + \tan 70\tan 80\tan 20 - \tan 10\tan 80\tan 40 = 3\tan 80\tan 40\tan 20$

$\Leftrightarrow \tan 20 + \tan 80 - \tan 40 = 3\tan 20\tan 40\tan 80$

(do $\tan 50\tan 40 = \tan 70\tan 20 = \tan 10\tan 80 = 1$)

$\Leftrightarrow \tan 20(1 - \tan 40\tan 80) + \tan 80(1 - \tan 20\tan 40)$

$- \tan 40(1 + \tan 20\tan 80) = 0. \qquad (11)$

Áp dụng công thức: $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$, nên

$$(11) \Leftrightarrow \tan 20\frac{\tan 80 + \tan 40}{\tan 120} + \tan 80\frac{\tan 40 + \tan 20}{\tan 60} - \tan 40(1 + \tan 20\tan 80) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan 60}\tan 40(\tan 80 - \tan 20) = \tan 40(1 + \tan 80\tan 20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan 60}(\tan 80 - \tan 20) = 1 + \tan 80\tan 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan 80 - \tan 20}{1 + \tan 80\tan 20} = \tan 60$$

$$\Leftrightarrow \tan 60 = \tan 60. \qquad (12)$$

Từ (12) suy ra (11) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bình luận: Trong 4 cách giải, có 3 cách sử dụng thuần túy biến đổi lượng giác, còn 1 cách kết hợp với các kiến thức về tính chất nghiệm của một phương trình đại số (cụ thể sử dụng định lí Viet trong thí dụ này).

Bài 4. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = 4.$

Giải

Vì $\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}$ nằm trong số các nghiệm của phương trình:

$3x + 4x = (2k + 1)\pi$, với $k \in Z$

Từ đó suy ra xét phương trình sau đây:

$\cos 3x = -\cos 4x$ hay $\cos 3x + \cos 4x = 0. \qquad (1)$

Ta có: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$

Vì thế $(1) \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 8\cos^4 x + 4\cos^3 x - 8\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0 \qquad (2)$

Khi $x \in \left\{\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}\right\}$ thì $\cos x + 1 \neq 0$, nên suy ra

$\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ là ba nghiệm phân biệt của phương trình:

$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad (3)$

Đặt $x_1 = \cos\frac{\pi}{7}$; $x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}$; $x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$, ta có theo định lí Viet:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\left(-\dfrac{4}{8}\right) = \dfrac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{-1}{8} \end{cases} \qquad (4)$$

Ta có: $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$

$$= \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} \qquad (5)$$

Thay (4) vào (5) và có: $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{8}} = 4 \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Xét cách giải khác bằng cách thuần túy biến đổi lượng giác như sau:

Ta có:

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = \frac{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}} \qquad (6)$$

Đặt $S_1 = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$

$S_2 = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$

$S_3 = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$,

thì $(6) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = \dfrac{S_2}{S_3} \qquad (7)$

Do $\sin\frac{\pi}{7} \neq 0$, nên ta có:

$$2S_1\sin\frac{\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}$$

$$=\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}.$$

Do $\sin\frac{\pi}{7}\neq 0,\Rightarrow S_1=\frac{1}{2}$ (8)

Ta có:

$$S_2=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)^2-\left(\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[S_1^2-\left(\frac{1+\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\frac{1+\cos\frac{6\pi}{7}}{2}+\frac{1+\cos\frac{10\pi}{7}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}S_1^2-\frac{1}{4}\left[3+\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}\right)\right] \qquad (9)$$

Ta có $\cos\frac{2\pi}{7}=-\cos\frac{5\pi}{7};\ \cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7};\ \cos\frac{10\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$, nên từ (9), ta có:

$$S_2=\frac{1}{2}S_1^2-\frac{1}{4}[3-S_1]. \qquad (10)$$

Thay (8) vào (10) và có: $S_2=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}.$ (11)

Ta lại có:

$$S_3=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{7}+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}S_1=-\frac{1}{8} \qquad (12)$$

Thay (11) (12) vào (7) và có:

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{8}}=4\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos^4\frac{\pi}{14}+\cos^4\frac{3\pi}{14}+\cos^4\frac{5\pi}{14}}{4\cos^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{3\pi}{14}\cos^2\frac{5\pi}{14}}=3.$$

Giải

Ta có:

$\cos 7x=\cos 6x\cos x-\sin 6x\sin x$

$=\cos x(4\cos^3 2x-3\cos 2x)-2\sin x\sin 3x\cos 3x$

$=\cos x[4(2\cos^2x-1)^3-3(2\cos^2x-1)]-2\sin x(3\sin x-4\sin^3x)(4\cos^3x-3\cos)$

$=\cos x[4(8\cos^6x-12\cos^4x+6\cos^2x-1)-6\cos^2x+3]$

$\qquad -2\sin^2x(3-4\sin^2x)(4\cos^3x-3\cos x)]$

$=\cos x(64\cos^6x-112\cos^4x+56\cos^2x-7).$ (1)

Trong (1) thay $x=\frac{\pi}{14}$, và do $\cos\frac{\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\cos\frac{\pi}{14}\neq 0$, nên từ (1) suy ra phương trình: $64x^3-112x^2+56x-7=0$ (2)

nhận $x_1=\cos^2\frac{\pi}{14}$ là nghiệm. Tương tự $x_2=\cos^2\frac{3\pi}{14}$, $x_3=\cos^2\frac{5\pi}{14}$ cũng là nghiệm của (1). Rõ ràng x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm khác nhau của (2), nên theo định lí Viet, ta có:

$$x_1+x_2+x_3=\frac{112}{64}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{56}{64}$$

$$x_1x_2x_3=\frac{7}{64}.$$

Ta có: $$\frac{\cos^4\frac{\pi}{14}+\cos^4\frac{3\pi}{14}+\cos^4\frac{5\pi}{14}}{4\cos^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{3\pi}{14}\cos^2\frac{5\pi}{14}}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4x_1x_2x_3}$$

$$=\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{4x_1x_2x_3}$$

$$=\frac{\left(\frac{112}{64}\right)^2-2.\frac{56}{64}}{4.\frac{7}{64}}=\frac{\frac{56}{64}\left(4.\frac{56}{64}-2\right)}{\frac{7}{16}}=3$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 6. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}}+\frac{1}{\sin^2\frac{6\pi}{7}}=8.$$

Giải

Rõ ràng $\frac{2\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{6\pi}{7}$ thỏa mãn phương trình: $\sin^2 4x=\sin^2 3x$. (1)

Đặt $t=\sin x$ và áp dụng các công thức:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 3t - 4t^3$

$\sin^2 4x = 16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x = 16t^2(1-t^2)(1-2t^2)^2$, khi đó (1) có dạng sau:

$64t^3 - 112t^2 + 56t - 7 = 0.$ (2)

Theo nhận xét trên (2) có 3 nghiệm phân biệt:

$$t_1=\sin^2\frac{2\pi}{7};\ t_2=\sin^2\frac{3\pi}{7};\ t_3=\sin^2\frac{6\pi}{7}.$$

Ta có: $\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}}+\frac{1}{\sin^2\frac{6\pi}{7}}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{t_2t_3+t_1t_3+t_1t_2}{t_1t_2t_3}$ (3)

Áp dụng định lí Viet với (2), thì $\begin{cases} t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=\frac{56}{64} \\ t_1t_2t_3=\frac{7}{64} \end{cases}$ (4)

Thay (4) vào (3) đi đến VP (3) = 8 ⇒ đpcm.

Nhận xét:

1. Đẳng thức trên có cách chứng minh khác sau đây

Dễ thấy đẳng thức đầu bài tương đương với đẳng thức sau

$$\left(\cot^2\frac{2\pi}{7}-1\right)+\left(\cot^2\frac{3\pi}{7}-1\right)+\left(\cot^2\frac{6\pi}{7}-1\right)=2 \quad (5)$$

$\left(\text{sử dụng công thức } 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\right).$

Lại áp dụng công thức $\cot^2\alpha - 1 = 2\cot 2\alpha\cot\alpha$, thì

$$(5) \Leftrightarrow \cot\frac{4\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7}+\cot\frac{6\pi}{7}\cot\frac{3\pi}{7}+\cot\frac{12\pi}{7}\cot\frac{6\pi}{7}=1$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{4\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7}+\cot\frac{\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7}+\cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7}=1. \quad (6)$$

Ta biết rằng nếu $x + y + z = \pi$, thì: $\cot x\cot y + \cot y\cot z + \cot z\cot x = 1$.

Vậy (6) đúng và đó là đpcm.

2. Ta có bài toán tương tự sau:

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^4\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^4\frac{3\pi}{7}}=416.$

Vắn tắt lời giải như sau:

Do $\frac{\pi}{7};\frac{2\pi}{7};\frac{3\pi}{7}$ thỏa mãn phương trình: $\cos^2 4x=\cos^2 3x$,

nên suy ra $t_1=\cos^2\frac{\pi}{7}, t_2=\cos^2\frac{2\pi}{7}, t_3=\cos^2\frac{3\pi}{7}$ là ba nghiệm phân biệt của phương trình: $64t^3 - 80t^2 + 24t - 1 = 0$, từ đó suy ra đpcm.

Bài 7. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}.$$

Giải

Rõ ràng $\frac{2\pi}{7};\frac{4\pi}{7};\frac{8\pi}{7}$ thỏa mãn phương trình: $\cos 4x=\cos 3x$ (1)

Dễ thấy (1) $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 4\cos^3 x - 3\cos$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1) = 0$ (2)

Vì $\frac{2\pi}{7};\frac{4\pi}{7};\frac{8\pi}{7}$ không thỏa mãn phương trình $\cos x - 1 = 0$, nên nó thỏa mãn phương trình: $8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

Vì lẽ đó $t_1=2\cos\frac{2\pi}{7}, t_2=2\cos\frac{4\pi}{7}, t_3=2\cos\frac{8\pi}{7}$ là ba nghiệm phân biệt của phương trình: $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$. (3)

Theo định lí Viet áp dụng với (3), ta có:

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=-1 \\ t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-2 \\ t_1t_2t_3=1. \end{cases} \quad (4)$$

Đặt $A=\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2}+\sqrt[3]{t_3}$

$B=\sqrt[3]{t_1t_2}+\sqrt[3]{t_2t_3}+\sqrt[3]{t_3t_1}$, thì

$A^3 = t_1+t_2+t_3-3\sqrt[3]{t_1t_2t_3}+3AB.$ (5)

Từ (4) (5) suy ra $A^3 = -4 + 3AB$. (6)

Lập luận tương tự ta có: $B^3 = -5 + 3AB$. (7)

Nhân từng vế (6) (7), ta đi đến: $(AB)^3 = (3AB - 4)(3AB - 5)$

$\Rightarrow (AB - 3)^3 + 7 = 0$

$\Rightarrow AB = 3 - \sqrt[3]{7}$. (8)

Từ (6) và (8) ta có: $A^3 = 5 - 3\sqrt[3]{7}$ hay $A = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}$. (9)

Ta có:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.A. \qquad (10)$$

Kết hợp (9) (10) suy ra:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 8. Chứng minh rằng:

$$\tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}.$$

Giải

Đặt $\alpha = \frac{\pi}{11}$, khi đó đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức sau: $\tan3\alpha + 4\sin2\alpha = \sqrt{11}$. (1)

$\Leftrightarrow \sin3\alpha + 4\sin2\alpha\cos3\alpha = \sqrt{11}\cos3\alpha$

$\Leftrightarrow (\sin3\alpha + 4\sin2\alpha\cos3\alpha)^2 - 11\cos^2 3\alpha = 0$

(do cả hai vế của (1) đều là số dương)

$\Leftrightarrow (\sin3\alpha + 2\sin5\alpha - 2\sin\alpha)^2 - 11\cos^2 3\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 3\alpha + 4\sin^2 5\alpha + 4\sin^2\alpha + 4\sin5\alpha\sin3\alpha - 4\sin3\alpha\sin\alpha -$

$8\sin5\alpha\sin\alpha - 11\cos^2 3\alpha = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos6\alpha}{2} + 2(1-\cos10\alpha) + 2(1-\cos2\alpha) + 2(\cos2\alpha - \cos8\alpha)$$

$$-2(\cos2\alpha - \cos4\alpha) - 4(\cos4\alpha - \cos6\alpha) - 11\frac{1+\cos6\alpha}{2} = 0$$

$\Leftrightarrow -1 - 2(\cos2\alpha + \cos4\alpha + \cos6\alpha + \cos8\alpha + \cos10\alpha) = 0.$ (2)

Do $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{11} \neq 0$, nên

(2) $\Leftrightarrow -2\sin\alpha(\cos2\alpha + \cos4\alpha + \cos6\alpha + \cos8\alpha + \cos10\alpha) = \sin\alpha$ (3)

Áp dụng công thức: $2\sin a\cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$, nên

(3) $\Leftrightarrow \sin\alpha - \sin3\alpha + \sin3\alpha - \sin5\alpha + \sin5\alpha - \sin7\alpha + \sin7\alpha - \sin9\alpha$

$+ \sin9\alpha - \sin11\alpha = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow -\sin11\alpha = 0.$ (4)

Do $\alpha = \frac{\pi}{11}$, nên $\sin11\alpha = \sin\pi = 0$.

Vậy (4) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 9. Chứng minh rằng

$\tan^2 20^0 + \tan^2 40^0 + \tan^2 60^0 = 33273.$

Giải

Sử dụng công thức: $\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$, suy ra nếu thay $\alpha = 20^0$, ta có:

$$\sqrt{3} = \frac{3\tan20^0 - \tan^3 20}{1 - 3\tan^2 20^0} \Leftrightarrow 3 = \frac{\tan^2 20^0(3 - \tan^2 20^0)^2}{(1 - 3\tan^2 20^0)^2}$$

$\Leftrightarrow \tan^6 20^0 - 33\tan^4 20^0 + 27\tan^2 20^0 - 3 = 0.$

Vậy $x_1 = \tan^2 20^0$ là nghiệm của phương trình:

$x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0.$ (1)

Lập luận tương tự, (1) còn nhận $x_2 = \tan^2 40^0$ và $x_3 = \tan^2 80^0$ là nghiệm. Vậy x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm khác nhau của (1).

Ta có: $\tan^6 20^0 + \tan^6 40^0 + \tan^6 80^0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

$= (x_1 + x_2 + x_3)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1\right) + 3x_1x_2x_3$ (2)

Áp dụng định lí Viet với (1), ta có:

$x_1 + x_2 + x_3 = 33$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 27$

$x_1x_2x_3 = 3.$

Thay vào (2), với lưu ý $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$

$\tan^6 20^0 + \tan^6 40^0 + \tan^6 80^0 = 33(33^2 - 3.27) + 9 = 33273 \Rightarrow$ đpcm.

Chú ý: Hoàn toàn tương tự, ta có đẳng thức sau:

$\tan^6 10^0 + \tan^6 50^0 + \tan^6 70^0 = 433.$

Bài 10. Chứng minh rằng:

$$\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5}\tan\frac{3\pi}{5}\tan\frac{4\pi}{5} = 5.$$

Giải

Ta có: $\tan5\alpha = \tan(3\alpha + 2\alpha) = \frac{\tan3\alpha + \tan2\alpha}{1 - \tan3\alpha\tan2\alpha}$

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

$$= \frac{\dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} + \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1 - \dfrac{(3\tan\alpha - \tan 3\alpha)(2\tan\alpha)}{(1-3\tan^2\alpha)(1-\tan^2\alpha)}} = \tan\alpha \frac{\tan^4\alpha - 10\tan^2\alpha + 5}{5\tan^4\alpha - 10\tan^2\alpha + 1} \quad (1)$$

Trong (1) thay $\alpha = \frac{\pi}{5}$, và chú ý rằng: $\tan\pi = 0$; $\tan\frac{\pi}{5} \neq 0$, nên từ (1) suy ra

$\tan^4\frac{\pi}{5} - 10\tan^2\frac{\pi}{5} + 5 = 0$.

Vậy $\tan\frac{\pi}{5}$ là nghiệm của phương trình trùng phương $x^4 - 10x^2 + 5 = 0$ (2)

Tương tự $\tan\frac{2\pi}{5}, \tan\frac{3\pi}{5}, \tan\frac{4\pi}{5}$ là ba nghiệm khác của (2)

Do $\tan\frac{\pi}{5} = -\tan\frac{4\pi}{5}; \tan\frac{3\pi}{5} = -\tan\frac{4\pi}{5}$, nên $y_1 = \tan^2\frac{\pi}{5}; y_2 = \tan^2\frac{3\pi}{5}$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y^2 - 10y + 5 = 0$ (3)

Áp dụng định lí Viet với (3), ta có: $y_1y_2 = 5$ (4)

Lại có $\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5}\tan\frac{3\pi}{5}\tan\frac{4\pi}{5} = \left(-\tan^2\frac{\pi}{5}\right)\left(-\tan^2\frac{3\pi}{5}\right) = y_1y_2$ (5)

Từ (4) (5) suy ra $\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5}\tan\frac{3\pi}{5}\tan\frac{4\pi}{5} = 5 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 11.

1. Chứng minh rằng: $\tan\alpha\tan(60^0 + \alpha)\tan(60^0 - \alpha) = \tan3\alpha$, với giả thiết các tang xét trong hệ thức đều có nghĩa.
2. Áp dụng phần 1 hãy chứng minh:

a. $\tan3^0\tan17^0\tan23^0\tan37^0\tan43^0\tan57^0\tan63^0\tan77^0\tan83^0 = \tan27^0$,

b. $\tan1^0\tan61^0 = \tan3^0\tan31^0$.

Giải

1. Ta có:

$$\tan\alpha\tan(60^0 - \alpha)\tan(60^0 + \alpha) = \tan\alpha \frac{\sqrt{3} - \tan\alpha}{1 + \sqrt{3}\tan\alpha}\,\frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{1 - \sqrt{3}\tan\alpha}$$

$$= \tan\alpha \frac{3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = \tan3\alpha \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2.

a. Áp dụng phần 1/ ta có:

$VT = (\tan3^0\tan57^0\tan63^0)(\tan17^0\tan43^0\tan77^0)(\tan23^0\tan37^0\tan83^0)$

$= \tan9^0.\tan51^0.\tan69^0 = \tan27^0 \Rightarrow$ đpcm.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

b. Ta có do $\tan59^0 \neq 0$

$\tan1^0\tan61^0 = \tan3^0\tan31^0$

$\Leftrightarrow \tan1^0\tan61^0\tan59^0 = \tan3^0\tan31^0\tan59^0$ (1)

Theo phần 1/ thì VT (1) = $\tan3^0$

VP (1) = $\tan3^0\tan31^0\cot31^0 = \tan3^0$.

Vậy (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Chú ý: Hoàn toàn tương tự ta có đẳng thức sau:

$$\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{2\pi}{27}\tan\frac{4\pi}{27}\tan\frac{5\pi}{27}\tan\frac{7\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{11\pi}{27}\tan\frac{13\pi}{27} = \sqrt{3}.$$

Thật vậy áp dụng phần 1/ và làm như trên ta có:

$$VT = \tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27} = \tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{2\pi}{9} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Bài 12.

1. Chứng minh rằng:
   $\tan\alpha + \tan(\alpha + 60^0) + \tan(\alpha + 120^0) = 3\tan3\alpha$
   với giả thiết là các tang có mặt trong hệ thức đều có nghĩa.
2. Chứng minh rằng
   $S = \tan1^0 + \tan5^0 + \tan9^0 + \tan13^0 + ... + \tan173^0 + \tan177^0 = 45$.

Giải

1. Ta có:

$$VT = \tan\alpha + \frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{1 - \sqrt{3}\tan\alpha} + \frac{\tan\alpha - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan\alpha}$$

$$= \frac{\tan\alpha(1 - 3\tan^2\alpha) + (\tan\alpha + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}\tan\alpha) + (1 - \sqrt{3}\tan\alpha)(\tan\alpha - \sqrt{3})}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

$$= 3\tan\alpha \frac{3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = 3\tan3\alpha \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. Áp dụng phần 1/ lần lượt với

$\alpha = 1^0 + 4^0k$ (k = 0, 1, 2, 3,..., 14)

Ta có: $\tan1^0 + \tan61^0 + \tan121^0 = 3\tan3^0$

$\tan5^0 + \tan65^0 + \tan125^0 = 3\tan15^0$

$\tan9^0 + \tan69^0 + \tan129^0 = 3\tan27^0$

...

$\tan53^0 + \tan113^0 + \tan173^0 = 3\tan159^0$

$\tan57^0 + \tan117^0 + \tan177^0 = 3\tan171^0$.

Cộng từng vế 15 đẳng thức trên và có:

$S = 3(\tan3^0 + \tan15^0 + \tan27^0 + ... + \tan159^0 + \tan171^0)$

$= 3[(\tan 3^0 + \tan 63^0 + \tan 123^0) + (\tan 15^0 + \tan 75^0 + \tan 135^0) +$
$(\tan 27^0 + \tan 87^0 + \tan 147^0) + (\tan 39^0 + \tan 99^0 + \tan 159^0) +$
$(\tan 51^0 + \tan 111^0 + \tan 171^0)]$.

Lại áp dụng phần 1/ ta có:

$$S = 9(\tan 9^0 + \tan 45^0 + \tan 81^0 + \tan 117^0 + \tan 153^0)$$
$$= 9(\tan 9^0 + \tan 81^0 + \tan 117^0 + \tan 153^0) + 9$$
$$= 9(\tan 9^0 + \tan 81^0 - \tan 63^0 - \tan 27^0) + 0. \qquad (1)$$

Lại có:

$$\tan 9^0 + \tan 81^0 - \tan 63^0 - \tan 27^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 9^0 \cos 81^0} - \frac{\sin 90^0}{\cos 63^0 \cos 27^0}$$
$$= \frac{1}{\sin 9 \cos 9} - \frac{1}{\sin 27 \cos 27}$$
$$= \frac{2}{\sin 18^0} - \frac{2}{\sin 54} = \frac{2(\sin 54^0 - \sin 18^0)}{\sin 18^0 \sin 54^0}$$
$$= \frac{4.\cos 36^0 \sin 18^0}{\sin 54^0 \sin 18^0} = 4. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) và có: $S = 45 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 13.

1. Chứng minh: $\tan^2\alpha + \tan^2(60^0 - \alpha) + \tan^2(60 + \alpha) = 9\tan^2 3\alpha + 6$.
2. Chứng minh: $\tan^2 5^0 + \tan^2 10^0 + \tan^2 15^0 + ... + \tan^2 80^0 + \tan 85^0 = 198\frac{1}{3}$.

Giải

1. Ta có:

$$VT = \tan^2\alpha + \frac{(\sqrt{3} - \tan\alpha)^2}{(1 + \sqrt{3}\tan\alpha)^2} + \frac{(\sqrt{3} + \tan\alpha)^2}{(1 - \sqrt{3}\tan\alpha)^2}$$
$$= \tan^2\alpha + \frac{[(\sqrt{3} - \tan\alpha)(1 - \sqrt{3}\tan\alpha)]^2 + [(\sqrt{3} + \tan\alpha)(1 + \sqrt{3}\tan\alpha)]^2}{(1 - 3\tan^2\alpha)^2}$$
$$= \tan^2\alpha + \frac{[\sqrt{3}(1 + \tan^2\alpha) - 4\tan\alpha]^2 + [\sqrt{3}(1 + \tan^2\alpha) + 4\tan^2\alpha]^2}{(1 - 3\tan^2\alpha)^2}$$
$$= \tan^2\alpha + \frac{6(1 + \tan^2\alpha)^2 + 32\tan^2\alpha}{(1 - 3\tan^2\alpha)^2} = \frac{9\tan^6\alpha + 45\tan^2\alpha + 6}{(1 - 3\tan^2\alpha)^2}$$
$$= \frac{9\tan^2\alpha(3 - \tan^2\alpha) + 6(1 - 3\tan^2\alpha)^2}{(1 - 3\tan^2\alpha)^2} = 9\left[\frac{\tan\alpha(3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}\right]^2 + 6$$
$$= 9\tan^2 3\alpha + 6 \Rightarrow \text{Đó là đpcm.}$$

2. Đặt vế trái của đẳng thức cần chứng minh là S. Ta có:

$$S = (\tan^2 5^0 + \tan^2 55^0 + \tan^2 65^0) + (\tan^2 10 + \tan^2 50 + \tan^2 70) +$$
$$(\tan^2 15^0 + \tan^2 45^0 + \tan^2 75) + (\tan^2 20 + \tan^2 40 + \tan^2 80) +$$
$$(\tan^2 25^0 + \tan^2 35^0 + \tan^2 85^0) + \tan^2 30^0 + \tan^2 60. \qquad (1)$$

Từ (1) và áp dụng phần 1/ ta có:

$$S = (9\tan^2 15^0 + 6) + (9\tan^2 30^0 + 6) + (9\tan^2 45^0 + 6) + (9\tan^2 60^0 + 6) +$$
$$(9\tan^2 75^0 + 6) + \frac{1}{3} + 3$$
$$= 9(\tan^2 15^0 + \tan^2 45^0 + \tan^2 75^0) + 33 + \frac{1}{3} + 9(\tan^2 30^0 + \tan^2 60^0) \qquad (2)$$

Từ (2) lại áp dụng phần 1/ ta thu được:

$$S = 9(9\tan^2 45 + 6) + 33 + \frac{1}{3} + 9\left(\frac{1}{3} + 3\right) = 81 + 87 + \frac{1}{3} + 30 = 198\frac{1}{3}.$$

Đó là đpcm.

Bài 14.

1. Chứng minh rằng

$$\sin\alpha\sin(60^0 + \alpha)\sin(60^0 - \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha,$$
$$\cos\alpha\cos(60^0 + \alpha)\cos(60^0 - \alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha.$$

2. Chứng minh rằng

$$\sin 2^0 \sin 18^0 \sin 22^0 \sin 38^0 \sin 42^0 \sin 58^0 \sin 62^0 \sin 78^0 \sin 82^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{1024}.$$

Giải

1. Ta có:

$$\sin\alpha\sin(60^0 + \alpha)\sin(60^0 - \alpha)$$
$$= \sin\alpha(\sin 60^0\cos\alpha + \sin\alpha\cos 60^0)(\sin 60^0\cos\alpha - \sin\alpha\cos 60^0)$$
$$= \sin\alpha(\sin^2 60^0\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2 60^0) = \sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sin\alpha\left(3 - 3\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \frac{1}{4}\left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Tương tự cũng có

$$\cos\alpha\cos(60^0 + \alpha)\cos(60^0 - \alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. Ta có:

$$VT = (\sin 2^0 \sin 62^0 \sin 58^0)(\sin 18^0 \sin 42^0 \sin 78^0)(\sin 22^0 \sin 38^0 \sin 82^0) \qquad (1)$$

Từ (1) và áp dụng phần 1/ có:

$$VT = \left(\frac{1}{4}\sin 6^0\right)\left(\frac{1}{4}\sin 54^0\right)\left(\frac{1}{4}\sin 66^0\right) = \frac{1}{64}(\sin 6^0 \sin 66^0 \sin 54^0) \qquad (2)$$

Từ (2) và lại áp dụng phần 1/ ta có:

$$VT = \frac{1}{64}.\frac{1}{4}\sin 18^0 \qquad (3)$$

Theo bài, ta có $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$ (4)

Thay (4) vào (3) và có $VT = \dfrac{\sqrt{5}-1}{1024} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 15. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}$
2. $\sin^2\dfrac{\pi}{7} + \sin^2\dfrac{2\pi}{7} + \sin^2\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{7}{4}$
3. $\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{4\pi}{7} = \sin^2\dfrac{4\pi}{7} - \sin^2\dfrac{\pi}{7}$
4. $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} = -\dfrac{1}{8}$
5. $\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$
6. $\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} - \dfrac{1}{2}.$

Giải

1. Ta có:

$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$\left(\text{do } \sin\dfrac{3\pi}{7} = \sin\dfrac{4\pi}{7} \neq 0\right) \Rightarrow$ đpcm.

2. Ta có:

$$\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) \quad (1) \left(\text{do } \cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

Đặt $S = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$ (2)

Vì $\sin\dfrac{\pi}{7} \neq 0$, nên từ (2) có:

$$2S\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7} \quad (3)$$

Từ (3) có $S = -\dfrac{1}{2}.$ (4)

Thay (4) vào (2) và có: $\sin^2\dfrac{\pi}{7} + \sin^2\dfrac{2\pi}{7} + \sin^2\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow$ đpcm.

3. Ta có: $\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{4\pi}{7} = \sin^2\dfrac{4\pi}{7} - \sin^2\dfrac{\pi}{7}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{6\pi}{7} = 1 - \cos\frac{8\pi}{7} - \left(1 - \cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{8\pi}{7}. \quad (5)$$

Áp dụng công thức
$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, vậy (5) đúng $\Rightarrow$ đpcm

4. $$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} \quad (6)$$

Áp dụng liên tiếp công thức $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, ta có:

$$VP\ (6) = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

5. Ta nhận thấy $\dfrac{\pi}{7}; \dfrac{2\pi}{7}; \dfrac{3\pi}{7}$ thỏa mãn phương trình:

$\cos^2 4x = \cos^2 3x.$ (7)

Đặt $y = \cos^2 x > 0$, thì (7) có dạng:

$(2\cos^2 2x - 1)^2 = (4\cos^3 x - 3\cos x)^2$

$\Leftrightarrow [2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1]^2 = \cos^2 x(4\cos^2 x - 3)^2.$ (8)

Từ (8) suy ra:

$64y^2 - 144y^3 + 104y^2 - 25y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 64(y-1)\left(y^3 - \dfrac{5}{4}y^2 + \dfrac{3}{8}y - \dfrac{1}{64}\right) = 0.$ (9)

Do $\cos^2\frac{\pi}{7};\cos^2\frac{2\pi}{7};\cos^2\frac{3\pi}{7}$ đều khác nhau và khác 1, nên phương trình

$y^3-\frac{5}{4}y^2+\frac{3}{8}y-\frac{1}{64}=0$ hay $64y^3-80y^2+24y-1=0$.

Nhận $y_1=\cos^2\frac{\pi}{7};\ y_2=\cos^2\frac{2\pi}{7};\ y_3=\cos^2\frac{3\pi}{7}$ là nghiệm

Ta có:

$$\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}=\left(1-\cos^2\frac{\pi}{7}\right)\left(1-\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=(1-y_1)(1-y_2)(1-y_3)$$

$$=1-(y_1+y_2+y_3)+(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)-y_1y_2y_3.\quad(10)$$

Áp dụng định lí Viet, ta có:
$$\begin{cases}y_1+y_2+y_3=\dfrac{80}{64}\\ y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=\dfrac{24}{64}\\ y_1y_2y_3=\dfrac{1}{64}.\end{cases}\quad(11)$$

Thay (11) vào (10) và có: $\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{64}$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}\Rightarrow$ đpcm.

6. Ta có: $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}=2\cos\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ -\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}\quad(12)$

Theo bài 4, thì (12) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 16. Chứng minh

$$\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\pi}{5}.$$

Giải

Ta có:

$$\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\cos\left(\frac{3\pi}{7}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)\cos\frac{\pi}{5}+\left(\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=S_1\cos\frac{\pi}{5}+S_2\sin\frac{\pi}{5}\quad(1)$$

với $S_1=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7};\ \ S_2=\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$

do $\sin\frac{\pi}{7}\neq 0$, nên ta có:

$$2\sin\frac{\pi}{7}S_1=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\Rightarrow S_1=\frac{1}{2}.\quad(2)$$

Ta lại có: $S_2=\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0$

$$\Rightarrow S_2^2=\sin^2\frac{4\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}-2\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$=\frac{1-\cos\frac{8\pi}{7}+1-\cos\frac{4\pi}{7}+1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}S_1=\frac{7}{4}$$

Vì $S_2>0$, nên có $S_2=\frac{\sqrt{7}}{2}$. (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có đpcm.

Bài 17. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{\text{n dấu căn}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Giải

Ta chứng minh bằng nguyên lý quy nạp toán học:

+ Với n = 1, ta có $\sqrt{2}=2.\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}}$.

Vậy đẳng thức cần chứng minh đúng với n = 1.

+ Giả sử đẳng thức cần chứng minh đã đúng đến n = k, tức là ta có:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{k dấu căn}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}. \qquad (1)$$

+ Xét khi n = k + 1, ta có:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{k+1 dấu căn}}=\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{k dấu căn}}}\ .(2)$$

Thay (1) vào (2) và có:

$$\text{VT }(2)=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

$$=\sqrt{4.\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{(k+1)+2}}. \qquad (3)$$

Vậy từ (3) suy ra đẳng thức cần chứng minh cũng đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lý quy nạp toán học suy ra điều phải chứng minh.

Bài 18. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ldots\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{n dấu căn}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}.$$

Giải

Áp dụng bài 17, ta có VT (vế trái đẳng thức cần chứng minh)

$$\text{VT}=\left(2\cos\frac{\pi}{2^2}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{2^3}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{2^4}\right)\ldots\left(2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{\left(2^n\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^4}\ldots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} \qquad (1)$$

Áp dụng liên tiếp công thức sin2α = 2sinαcosα, từ (1) ta có:

$$\text{VT}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 19. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\alpha}{2^2}+\frac{1}{2^3}\tan\frac{\alpha}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\alpha}{2n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\alpha}{2^n}-\cot\alpha,$$

(với giả thiết là các biểu thức tang và cotang có mặt trong biểu thức đều có nghĩa)

Giải

$$\text{Ta có: }\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-2\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=-2\cot2\alpha$$

Vậy tanα = cotα – 2cot2α (1)

Áp dụng (1) liên tiếp ta có các đẳng thức sau:

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha$$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{\alpha}{2^2}=\frac{1}{2^2}\cot\frac{\alpha}{2^2}-\frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2^3}\tan\frac{\alpha}{2^3}=\frac{1}{2^3}\cot\frac{\alpha}{2^3}-\frac{1}{2^2}\cot\frac{\alpha}{2^2}$$

...

$$\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{\alpha}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-2}}\cot\frac{\alpha}{2^{n-2}}$$

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{\alpha}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\alpha}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên, ta có: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\alpha}{2^k}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\alpha}{2^n}-\cot\alpha$

Đó là đpcm.

Bài 20. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\sin^3\frac{\alpha}{3}+3\sin^3\frac{\alpha}{3^2}+3^2\sin^3\frac{\alpha}{3^3}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=-\frac{1}{4}\sin\alpha+\frac{3^n}{4}\sin\frac{\alpha}{3^n}.$$

Giải

Áp dụng công thức: sin3x = 3sinx – 4sin³x, ta có:

$$\sin^3x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin3x. \qquad (1)$$

Áp dụng liên tiếp (1), ta có các đẳng thức sau:

$$\sin^3\frac{\alpha}{3}=\frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{4}\sin\alpha$$

$$3\sin^3\frac{\alpha}{3^2}=\frac{3^2}{4}\sin\frac{\alpha}{3^2}-\frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3}$$

$$3^2\sin^3\frac{\alpha}{3^3}=\frac{3^3}{4}\sin\frac{\alpha}{3^3}-\frac{3^2}{4}\sin\frac{\alpha}{3^2}$$

...

$$3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{3^n}{4}\sin\frac{\alpha}{3^n}-\frac{3^{n-1}}{4}\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}.$$

Cộng từng vế n – 1 đẳng thức trên và có:

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^k} = -\frac{1}{4}\sin\alpha + \frac{3^n}{4}\sin\frac{\alpha}{3^n}$$

Đó là đpcm.

Bài 21. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$S = \left(\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\tan\frac{\alpha}{2^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^n}\tan\frac{\alpha}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{4^n\sin^2\frac{\alpha}{2^n}} - \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

Giải

Với mọi k = 1, 2,...,n, ta có: $\left(\frac{1}{2^k}\tan\frac{\alpha}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{4^k}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2^k}} - 1\right)$ (1)

(áp dụng công thức $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$).

Áp dụng liên tiếp (1), ta có:

$$S = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{\alpha}{2^2}} + \ldots + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{\alpha}{2^n}} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right)$$

$$= S_1 - \frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}} = S_1 - \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right], \quad (2)$$

ở đây $S_1 = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{\alpha}{2^2}} + \ldots + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{\alpha}{2^n}}$ (3)

Dễ dàng chứng minh được công thức sau:

$$\frac{1}{4\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{4\sin^2 x}. \quad (4)$$

Trong (4) lần lượt thay x bằng $\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2^2}; \frac{\alpha}{2^3}; \ldots; \frac{\alpha}{2^n}$, ta có các đẳng thức sau:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1}{4^2\cos^2\frac{\alpha}{2^2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{4^2\sin^2\frac{\alpha}{2^2}}$$

$$\frac{1}{4^3\cos^2\frac{\alpha}{2^3}} = \frac{1}{4^2\sin^2\frac{\alpha}{2^2}} - \frac{1}{4^3\sin^2\frac{\alpha}{2^3}}$$

...

$$\frac{1}{4^n\cos^2\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{4^{n-1}\sin^2\frac{\alpha}{2^{n-1}}} - \frac{1}{4^n\sin^2\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên, ta có:

$$S_1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{4^n\sin^2\frac{\alpha}{2^n}}. \quad (5)$$

Thay (5) vào (2) (3) và có: $S = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{4^n\sin^2\frac{\alpha}{2^n}} - \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

Đó là đpcm.

Bài 22. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}\cos 2^k}{1-\cos 2^{k+1}} = \frac{2}{1-\cos 2} - \frac{2^{n+1}}{1-\cos 2^{n+1}}$$

Giải

Với mọi k = 1, 2,,...,n, ta có:

$$\frac{2^{k+1}\cos 2^k}{1-\cos 2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}(1+\cos 2^k) - 2^{k+1}}{1-\cos 2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}(1+\cos 2^k) - 2^{k+1}}{1-(2\cos^2 2^k - 1)}$$

$$= \frac{2^{k+1}(1+\cos 2^k)}{2-2\cos^2 2k} - \frac{2^{k+1}}{1-\cos 2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}(1+\cos 2^k)}{2(1+\cos 2^k)(1-\cos 2^k)} - \frac{2^{k+1}}{1-\cos 2^{k+1}}$$

$$= \frac{2^k}{1-\cos 2^k} - \frac{2^{k+1}}{1-\cos 2^{k+1}} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{1-\cos 2^k} - \frac{2^{k+1}}{1-\cos 2^{k+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1-\cos 2} - \frac{2^2}{1-\cos 2^2}\right) + \left(\frac{2^2}{1-\cos 2^2} - \frac{2^3}{1-\cos 2^3}\right) + \ldots + \left(\frac{2^n}{1-\cos 2^n} - \frac{2^{n+1}}{1-\cos 2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{2}{1-\cos 2} - \frac{2^{n+1}}{1-\cos 2^{n+1}}.$$

Đó là đpcm.

Bài 23. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \begin{cases} 0, \text{ nếu } x = 2k\pi \\ \dfrac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{2n+1}{2}x}{s\sin\dfrac{x}{2}}, \text{ nếu } x \neq 2k\pi \end{cases}, \text{ ở đây } k \in Z.$$

Giải

+ Rõ ràng nếu $x = 2k\pi \Rightarrow \sin x = \sin 2x = ... = \sin nx = 0$, do đó hiển nhiên $S_n = 0$.

+ Nếu $x \neq 2k\pi \Rightarrow \frac{x}{2} \neq k\pi \Rightarrow \sin\frac{x}{2} \neq 0$.

Do đó ta có: $2\sin\frac{x}{2}S_n = 2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + ... + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx$. (1)

Áp dụng công thức: 2sinasinb = cos(a – b) – cos(a + b), ta có từ (1)

$$2\sin\frac{x}{2}S_n = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + ... + \cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}S_n = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x \Rightarrow S_n = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 24. (ứng dụng hệ thức lượng giác trong bài toán dãy số)

Cho dãy số xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2)u_n}, n = 1, 2, ... \end{cases}$

Tìm u_{2012}.

Giải

Ta có: $\tan\frac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{1 + \cos\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$.

$$u_1 = \tan\frac{\pi}{6} \quad (1)$$

Từ đó theo cách xác định dãy ta có:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \tan\frac{\pi}{12}}{1 - u_n\tan\frac{\pi}{12}} \quad (2)$$

Nếu đặt $u_n = \tan\beta$, thì từ (2) có:

$$u_{n+1} = \frac{\tan\beta + \tan\frac{\pi}{12}}{1 - \tan\beta\tan\frac{\pi}{12}} = \tan\left(\beta + \frac{\pi}{12}\right) \quad (3)$$

Kết hợp (1), (3) suy ra $u_2 = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow u_3 = \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{12}\right)$

Từ đó bằng quy nạp suy ra: $u_n = \tan\left[\frac{\pi}{6} + (n-1)\frac{\pi}{12}\right]$ (4)

Bây giờ từ (4), ta đi đến:

$$u_{2012} = \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2011\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} + 167\pi + \frac{7\pi}{12}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{9\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1.$$

Bài 25. (ứng dụng hệ thức lượng giác trong bài toán dãy số)

Hai dãy số $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ được xác định bằng công thức truy hồi như sau:

$u_0 = 2$; $v_0 = 1$

$$u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}; \ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}.v_n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Tìm u_n và v_n.

Giải

Ta có: $u_0 = 2 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$; $v_0 = 1$,

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2u_0v_0}{u_0 + v_0} = \dfrac{2}{\frac{1}{u_0} + \frac{1}{v_0}} = \dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{3} + 1} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}} \\ v_1 = \sqrt{u_1v_0} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{2u_1v_1}{u_1 + v_1} = \dfrac{2}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1}} = \dfrac{2}{\cos^2\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{12}} \\ v_2 = \sqrt{u_2v_1} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = \dfrac{2u_2v_2}{u_2+v_2} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{v_2}} = \dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{12}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{12}\right)} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{12}\cos^2\dfrac{\pi}{24}} \\ v_3 == \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{24}}. \end{cases}$$

Bằng qui nạp ta có: $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2.3}\cos\dfrac{\pi}{2^2.3}\cos\dfrac{\pi}{2^3.3}...\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}.3}\cos^2\dfrac{\pi}{2^n.3}} & (1) \\ v_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2.3}\cos\dfrac{\pi}{2^2.3}...\cos\dfrac{\pi}{2^n.3}}. & (2) \end{cases}$

(bạn đọc xin tự nghiệm lại)

Tương tự như cách giải trong bài 17, ta có hệ thức sau:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}...\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}.$$

Từ đó suy ra: $\cos\dfrac{\pi}{2.3}\cos\dfrac{\pi}{2^2.3}...\cos\dfrac{\pi}{2^n.3} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n.3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n.3}}$

Thay lại vào (1), và có: $u_n = \dfrac{2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n.3}}{\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2^n.3}}$ hay $u_n = \dfrac{2^{n+1}\sqrt{3}}{3}\tan\dfrac{\pi}{2^n.3}$.

Còn thay vào (2), thì $v_n = \dfrac{2^{n+1}\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\pi}{2^n.3}$.

§ 3. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN

Các bài toán trong mục này có dạng sau đây: Giả sử các đại lượng trong hệ thức cần chứng minh thỏa mãn một điều kiện nào đó. Ta phải chứng minh hệ thức đã cho là đúng. Điều kiện cho trước có thể cho dưới dạng hình học, đại số,... Phương pháp giải các bài toán này là sự vận dụng khéo léo kết hợp giữa các phép biến lượng giác cơ bản và triệt để sử dụng các điều kiện đã cho trong đề bài.

Bài 1. Cho $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = m$.

Chứng minh rằng $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha) = m$.

Giải

Đặt $\alpha+\beta+\gamma = S$; $u = \beta+\gamma$; $v = \gamma+\alpha$; $w = \alpha+\beta$.

Khi đó dễ thấy $\alpha = S-u$; $\beta = S-v$; $\gamma = S-w$.

Ta có: $\dfrac{\cos\alpha}{\cos S} = \dfrac{\cos(S-u)}{\cos S} = \dfrac{\cos S\cos u+\sin S\sin u}{\cos S}$

$= \cos u + \sin u.\tan S$, (1)

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin S} = \dfrac{\sin(S-u)}{\sin S} = \dfrac{\sin S\cos u-\sin u\cos S}{\sin S}$

$= \cos u - \sin u.\cot S$. (2)

Tương tự (2), ta có:

$\dfrac{\cos\beta}{\cos S} = \cos v + \sin v.\tan S$; $\quad\dfrac{\sin\beta}{\sin S} = \cos v - \sin v.\cot S$ (2)

$\dfrac{\cos\gamma}{\cos S} = \cos w + \sin w.\tan S$; $\quad\dfrac{\sin\gamma}{\sin S} = \cos w\ \sin w.\cot S$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra

$\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{\cos S} = (\cos u+\cos v+\cos w)+(\sin u+\sin v+\sin w)\tan S$ (4)

$\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin S} = (\cos u+\cos v+\cos w)-(\sin u+\sin v+\sin w)\cot S$ (5)

Trừ từng vế (4) (5) và từ giả thiết ta có:

$(\sin u+\sin v+\sin w)(\tan S+\cot S) = 0$. (6)

Vì $|\tan S+\cot S| = |\tan S|+|\cot S| \ge 2$,

nên nói riêng $\tan S+\cot S \ne 0$, vậy từ (6) suy ra

$\sin u+\sin v+\sin w = 0$. (7)

Từ (7), (4) và giả thiết suy ra

$\cos u+\cos v+\cos w = m \Leftrightarrow \cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta) = m$.

Đó là đpcm.

Bài 2. Cho $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 0$

Chứng minh rằng $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \dfrac{1}{12}(\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma)$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma &= 4\cos^3\alpha+4\cos^3\beta+4\cos^3\gamma-3(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\\ &= 4(\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma) \quad (1)\end{aligned}$$

(do cosα + cosβ + cosγ = 0)

Áp dụng hằng đẳng thức, ta có:

$\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 - 3\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha + \cos\beta)$

$- 3\cos\beta\cos\gamma(\cos\beta + \cos\gamma) - 3\cos\gamma\cos\alpha(\cos\gamma + \cos\alpha) - 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$ (2)

Vì cosα + cosβ + cosγ = 0, nên

cosα + cosβ = −cosγ; cosβ + cosγ = − cosα; cosγcosα = −cosβ. (3)

Thay (3) vào (2) đi đến $\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma = 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. (4)

Lại thay (4) vào (1), và có: $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}(\cos3\alpha + \cos3\beta + \cos3\gamma)$.

Đó là đpcm.

Bài 3. Cho $\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = 0 \\ a\cos(\alpha+\varphi) + b\cos(\beta+\alpha) = 0, \text{ với } \varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Chứng minh rằng f(x) = acos(x + α) + bcos(β + α) = 0, ∀x.

Giải

Từ giả thiết: acos(α + φ) + bcos(β + φ) = 0, ta có:

acosαcosφ − asinαsinφ + bcosβcosφ − bsinβsinφ = 0

⇒ cosφ(acosα + bcosβ) − sinφ(asinα + bsinβ) = 0. (1)

Từ giả thiết acosα + bcosβ = 0, và sinφ ≠ 0 (do φ ≠ kπ, k ∈ Z), nên từ (1) suy ra: asinα + bsinβ = 0. (2)

Với mọi x, ta có:

f(x) = acosxcosα − asinxsinα + bcosxcosβ − bsinxsinβ

= (acosα + bcosβ)cosx − (asinα + bsinβ)sinx. (3)

Do acosα + bcosβ = 0 (gt) và theo (1) thì asinα + bsinβ = 0, từ đó từ (3) suy ra f(x) = 0, ∀x ∈ R.

Đó là đpcm.

Bài 4. Cho f(x) = asinx + bcosx.

Biết rằng $f(x_1) = f(x_2) = 0$; với $x_1 - x_2 \neq k\pi$

Chứng minh rằng f(x) = 0, ∀x ∈ R.

Giải

Ta có: $f(x_1) = a\sin x_1 + b\cos x_1 = 0$

$f(x_2) = a\sin x_2 + b\cos x_2 = 0.$

Xét hệ phương trình ẩn a, b

$$\begin{cases} a\sin x_1 + b\cos x_1 = 0 & (1) \\ a\sin x_2 + b\cos x_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} \sin x_1 & \cos x_1 \\ \sin x_2 & \cos x_2 \end{vmatrix} = \sin x_1\cos x_2 - \sin x_2\cos x_1 = \sin(x_1 - x_2).$

Vì $x_1 - x_2 \neq k\pi \Rightarrow D = \sin(x_1 - x_2) \neq 0$

Vậy hệ (1) (2) có nghiệm duy nhất:

$a = \frac{D_a}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x_1 \\ 0 & \cos x_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{0}{D} = 0.$ (do D ≠ 0)

Tương tự $b = \frac{D_b}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \sin x_1 & 0 \\ \sin x_2 & 0 \end{vmatrix}}{D} = 0.$

Do a = b = 0, nên rõ ràng ∀x ∈ R, ta có f(x) = 0 ⇒ đpcm.

Bài 5. Cho sin(α + 2β) = 2sinα. Chứng minh rằng tan(α + β) = 3tanβ, với giả thiết tan(α + β) và tanβ có nghĩa.

Giải

Viết lại giả thiết dưới dạng sau: sin[(α + β) + β] = 2sin[(α + β) − β] (1)

Từ (1), ta có:

sin(α + β)cosβ + sinβcos(α + β) = 2sin(α + β)cosβ − 2sinβcos(α + β)

⇒ 3sinβcos(α + β) = sin(α + β)cosβ.

Do tan(α + β) và tanβ có nghĩa nên cos(α + β) ≠ 0; cosβ ≠ 0.

Chia cả hai vế cho cos(α + β)cosβ và có: tan(α + β) = 3tanβ ⇒ đpcm.

Bài 6. Cho cos(2α + β) = 1. Chứng minh hệ thức $\tan(\alpha + \beta) - \tan\alpha = 2\tan\frac{\beta}{2}$ với giả thiết các tang có mặt trong hệ thức đều có nghĩa.

Giải

Từ cos(2α + β) = 1 ⇒ 2α + β = 2kπ, k ∈ Z

⇒ (α + β) + α = 2kπ, k ∈ Z (1)

Từ (1) suy ra tan(α + β) = −tanα.

⇒ tan(α + β) − tanα = −2tanα (2)

Lại từ 2α + β = 2kπ

$\Rightarrow \alpha + \frac{\beta}{2} = k\pi, k \in Z.$ (3)

Từ (3) suy ra $\tan\alpha = -\tan\frac{\beta}{2}$. (4)

Thay (4) vào (2) và có $\tan(\alpha + \beta) - \tan\alpha = 2\tan\frac{\beta}{2}$ ⇒ đpcm!

Bài 7. Cho $\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{n}{m}$. Chứng minh $\frac{1 + \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}{m + n} = \frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{m - n}$.

Giải

Đưa đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau:

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{(m+n)\tan\alpha}=\frac{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{m-n}\Leftrightarrow\frac{\sin(\alpha+\beta)}{(m+n)\tan\alpha\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{(m-n)\cos\alpha\cos\beta}$$

$\Leftrightarrow (m-n)\tan(\alpha+\beta)=(m+n)\tan\alpha.$ (1)

Từ giả thiết ta có:

$m\sin\beta = n\sin(2\alpha+\beta) \Rightarrow m\sin[(\alpha+\beta)-\alpha] = n\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$

$\Rightarrow m\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - m\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = n\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha + n\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow (m-n)\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha = (m+n)\sin\alpha\cos(\alpha+\beta).$ (2)

Chia cả hai vế của (2) cho $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$ ta có:

$(m-n)\tan(\alpha+\beta) = (m+n)\tan\alpha.$

Vậy (1) đúng ⇒ đpcm.

Chú ý: Ta hiểu rằng khi đề bài bắt chứng minh một hệ thức nào đó, thì mặc nhiên đã giải thiết là các biểu thức có mặt trong hệ thức đó trước hết phải có nghĩa.

Bài 8. Cho $\tan\frac{\beta}{2}=4\tan\frac{\alpha}{2}$. Chứng minh: $\tan\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{3\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$.

Giải

Đặt $t=\tan\frac{\alpha}{2}$, từ giả thiết ta có $\tan\frac{\beta}{2}=4t$.

Khi đó $\tan\dfrac{\beta-\alpha}{2}=\dfrac{\tan\frac{\beta}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{4t-t}{1+4t^2}=\dfrac{3t}{1+4t^2}.$ (1)

Áp dụng công thức: $\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$, ta có:

$$\frac{3\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}=\frac{\dfrac{6t}{1+t^2}}{5-3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{3t}{1+4t^2}.\qquad(2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Bài 9. Cho tan(α + β+ = 3tanα.

Chứng minh: $\sin(2\alpha+2\beta)+\sin2\alpha=2\sin2\beta$.

Giải

Đặt $t=\tan\alpha$.

Từ giả thiết ta có: $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=3\tan\alpha$

$\Rightarrow \tan\beta + t = 3t(1 - t.\tan\beta) \Rightarrow \tan\beta(1+3t^2)=3t$

$\Rightarrow \tan\beta=\dfrac{3t}{1+3t^2}.$ (1)

Ta có : $2\sin2\beta = 2\dfrac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta}.$ (2)

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta đi đến:

$2\sin2\beta=\dfrac{24t^2+8t}{9t^4+10t^2+1}.$ (3)

Mặt khác: $\sin[2(\alpha+\beta)]+\sin2\alpha=\dfrac{2\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}+\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$ (4)

Thay $\tan\alpha = t$, $\tan(\alpha+\beta)=3t$ vào (4) rồi rút gọn ta cũng có:

$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin2\alpha=\dfrac{24t^2+8t}{9t^4+10t^2+1}.$ (5)

Từ (3) (5) suy ra đpcm.

Bài 10. Cho $\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}=\dfrac{a}{b}$; $\dfrac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}=\dfrac{a_1}{b_1}$, với $ab_1+a_1b\neq0$.

Chứng minh rằng: $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{aa_1+bb_1}{ab_1+a_1b}$.

Giải

$$\text{Ta có: }\frac{aa_1+bb_1}{ab_1+a_1b}=\frac{\dfrac{aa_1}{bb_1}+1}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{a_1}{b_1}}=\frac{\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}\dfrac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}+1}{\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}+\dfrac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}}$$

$$=\frac{\sin(x-\alpha)\cos(x-\alpha)+\sin(x-\beta)\cos(x-\beta)}{\sin(x-\alpha)\cos(x-\beta)+\sin(x-\beta)\cos(x-\alpha)}$$

$$=\frac{\sin(2x-2\alpha)+\sin(2x-2\beta)}{2\sin[2\alpha-(a+\beta)]}$$

$$=\frac{2\sin[2x-(\alpha+\beta)]\cos(\alpha-\beta)}{2\sin[2x-(\alpha+\beta)]}=\cos(\alpha-\beta)\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Bài 11. Cho $\cos(\varphi-\alpha)=a$; $\sin(\varphi-\beta)=b$.

Chứng minh rằng: $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$VT = \cos^2(\varphi - \alpha) - 2\sin(\varphi - \beta)\cos(\varphi - \alpha)\sin(\alpha - \beta) + \sin^2(\varphi - \beta)$$

$$= \frac{1+\cos(2\varphi - 2\alpha)}{2} + \frac{1-\cos(2\varphi - 2\beta)}{2} - 2\sin(\varphi - \beta)\cos(\varphi - \alpha)\sin(\alpha - \beta)$$

$$= 1 - \sin[2\varphi - (\alpha + \beta)]\sin(\alpha - \beta) - 2\sin(\varphi - \beta)\cos(\varphi - \alpha)\sin(\alpha - \beta)$$

$$= 1 + \sin(\alpha - \beta)\{\sin[2\varphi - (\alpha + \beta)] - 2\sin(\varphi - \beta)\cos(\varphi - \alpha)\}$$

$$= 1 + \sin(\alpha - \beta)\{\sin[2\varphi - (\alpha + \beta)] - \sin[2\varphi - (\alpha + \beta)] - \sin(\alpha - \beta)\}$$

$$= 1 - \sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha - \beta) = VP \quad \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 12. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ và $\begin{cases} 3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1 \\ 3\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta = 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$.

Giải

Ta có: $\cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha\cos2\beta - \sin\alpha\sin2\beta$. (1)

Từ $3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1 \Rightarrow 3\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\beta = \cos2\beta$. (2)

Từ $3\sin2\alpha - 2\sin2\beta = 0 \Rightarrow \sin2\beta = \frac{3}{2}\sin 2\alpha = 3\sin\alpha\cos\alpha$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), suy ra:

$\cos(\alpha + 2\beta) = 3\sin^2\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 0$. (4)

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \alpha + 2\beta < \frac{3\pi}{2}$. (5)

Từ (4) ta có: $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\quad k \in \mathbb{Z}$

Do (5), ta có bất phương trình sau: $0 < \frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{3\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 1. \qquad (6)$$

Do k nguyên nên từ (6) có k = 0, vậy $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 13. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta).$$

Chứng minh rằng: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Giải

Từ giả thiết ta có: $1 - \cos2\alpha + 1 - \cos2\beta = 2\sin(\alpha + \beta)$

$\Leftrightarrow 2 - 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 2\sin(\alpha + \beta)$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 1$. (1)

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \alpha + \beta < \pi$. (2)

Giả thiết phản chứng: $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}$.

Khi đó từ (2) suy ra chỉ có hai khả năng sau đây xảy ra:

1. $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Khi đó: $\frac{\pi}{2} > \alpha + \beta > |\alpha - \beta| \geq 0$. (3)

Từ (3) suy ra: $\cos(\alpha - \beta) > \cos(\alpha + \beta) > 0$

$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) > \cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \sin^2(\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) > 1$. (4)

Vì (3), nên có $\quad \sin(\alpha + \beta) > \sin^2(\alpha + \beta)$ (5)

Từ (4) (5) đi đến: $\quad \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) > 1$ (6)

Từ (6) và (1) suy ra mâu thuẫn.

2. Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\alpha - \beta| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) > 0$

Mặt khác vì $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) < 0$.

Từ đó ta có: $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) < 0$.

$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta)xos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) < 1$ (7)

(do $\sin(\alpha + \beta) \leq 1$). Từ (7) và (1) cũng suy ra mâu thuẫn.

Vậy giả thiết phản chứng là sai $\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 14. Cho α, β đều thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ và $\alpha \neq \beta$. Giả sử

$$\frac{\cos x - \cos\alpha}{\cos x - \cos\beta} = \frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}.$$

Chứng minh rằng: $\quad \tan^2\frac{x}{2} = \tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$\cos x\cos\alpha\sin^2\beta - \cos x\sin^2\alpha\cos\beta = \sin^2\beta\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\beta$$

$$\Rightarrow \cos x(\cos\alpha\sin^2\beta - \cos\beta\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha(1 - \cos^2\beta) - \cos^2\beta(1 - \cos^2\alpha)$$
$$= \cos^2\alpha - \cos^2\beta. \qquad (1)$$

Mặt khác lại có:

$$\cos\alpha\sin^2\beta - \cos\beta\sin^2\alpha = \cos\alpha(1 - \cos^2\beta) - \cos\beta(1 - \cos^2\alpha)$$
$$= (\cos\alpha - \cos\beta)(1 + \cos\alpha\cos\beta) \qquad (2)$$

Từ (1) (2) và do giả thiết $\alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ và $\alpha \neq \beta$ nên ta có:

$\cos\alpha - \cos\beta \neq 0$, từ đó đi đến:

$$\cos x = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta}. \qquad (3)$$

Áp dụng công thức $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ nên từ (3) ta có:

$$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha - \cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha + \cos\beta} = \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)} = \tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 15. Cho $\alpha = 2\beta$; $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Chứng minh rằng: $\sin\beta(\sin\beta + \sin\gamma) = \sin^2\alpha$.

Giải

Ta có: $\sin\beta(\sin\beta + \sin\gamma) = 2\sin\beta\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$. (1)

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\beta, \qquad (2)$$

$$\frac{\gamma-\beta}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \cos\frac{\gamma-\beta}{2} = \sin\alpha \qquad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) suy ra:

$\sin\beta(\sin\beta + \sin\gamma) = 2\sin\beta\cos\beta\sin\alpha = \sin2\beta\sin\alpha = \sin^2\alpha$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 16. Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau và bốn góc φ, α, β, γ thỏa mãn hệ thức: $\frac{a}{\tan(\varphi+\alpha)} = \frac{b}{\tan(\varphi+\beta)} = \frac{c}{\tan(\varphi+\gamma)}$.

Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) + \frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma) + \frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha) = 0$.

Giải

Từ giả thiết và áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\tan(\varphi+\alpha)} = \frac{b}{\tan(\varphi+\beta)} = \frac{a+b}{\tan(\varphi+\alpha)+\tan(\varphi+\beta)} = \frac{(a+b)\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\beta)}{\sin(2\varphi+\alpha+\beta)} \qquad (1)$$

$$\frac{a}{\tan(\varphi+\alpha)} = \frac{b}{\tan(\varphi+\beta)} = \frac{a-b}{\tan(\varphi+\alpha)-\tan(\varphi+\beta)} = \frac{(a-b)\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin(2\varphi+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$, hay

$$\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin(2\varphi+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(2\varphi+2\beta) - \cos(2\varphi+2\alpha)]. \qquad (3)$$

Lập luận tương tự, ta có:

$$\frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma) = \frac{1}{2}[\cos(2\varphi+2\gamma) - \cos(2\varphi+2\beta)], \qquad (4)$$

$$\frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha) = \frac{1}{2}[\cos(2\varphi+2\alpha) - \cos(2\varphi+2\gamma)]. \qquad (5)$$

Cộng từng vế (3) (4) (5), ta có:

$$\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) + \frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma) + \frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha) = 0.$$

Đó là đpcm.

Bài 17. Cho $\frac{r^2-1}{1+2r\cos\alpha+r^2} = \frac{1+2r\cos\beta+r^2}{r^2-1}$.

Chứng minh rằng: $\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2} = \left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2$.

Giải

Từ giả thiết và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{r^2-1}{1+2r\cos\alpha+r^2} = \frac{1+2r\cos\beta+r^2}{r^2-1} = \frac{2r^2+2r\cos\beta}{2r^2+2r\cos} = \frac{r+\cos\beta}{r+\cos\alpha}, \qquad (1)$$

$$\frac{r^2-1}{1+2r\cos\alpha+r^2} = \frac{1+2r\cos\beta+r^2}{r^2-1} = \frac{-1-r\cos\beta}{1+r\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hệ thức: $\frac{r+\cos\beta}{r+\cos\alpha} = \frac{-1-r\cos\beta}{1+r\cos\alpha}$. (3)

Từ (3) lại theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{r+\cos\beta}{r+\cos\alpha} = \frac{-1-r\cos\beta}{1+r\cos\alpha} = \frac{(r-1)-(r-1)\cos\beta}{(r+1)+(r+1)\cos\alpha} = \frac{(r-1)(1-\cos\beta)}{(r+1)(1+\cos\alpha)}, \qquad (4)$$

$$\frac{r+\cos\beta}{r+\cos\alpha} = \frac{-1-r\cos\beta}{1+r\cos\alpha} = \frac{(r+1)+(r+1)\cos\beta}{(r-1)-(r-1)\cos\alpha} = \frac{(r+1)(1+\cos\beta)}{(r-1)(1-\cos\alpha)}. \qquad (5)$$

Từ (4) (5) suy ra $\frac{r-1}{r+1}\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{r+1}{r-1}\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}=\left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2$.

$\Rightarrow$ Đó là đpcm.

Bài 18.

1. Cho $\frac{\cos x}{a_1}=\frac{\cos 2x}{a_2}=\frac{\cos 3x}{a_3}$. Chứng minh rằng: $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{2a_2-a_1-a_3}{4a_2}$.

2. Cho $\frac{\sin x}{a_1}=\frac{\sin 3x}{a_3}=\frac{\sin 5x}{a_5}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1+a_5}{a_3}=\frac{a_3-a_1}{a_1}$.

Giải

1. Từ giả thiết suy ra: $a_1=\frac{a_2\cos x}{\cos 2x}$; $a_3=\frac{a_2\cos 3x}{\cos 2x}$.

Vì thế: $\frac{2a_2-a_1-a_3}{4a_2}=\frac{2-\frac{\cos x}{\cos 2x}-\frac{\cos 3x}{\cos 2x}}{4}=\frac{2\cos 2x-(\cos 3x+\cos x)}{4\cos 2x}$

$$=\frac{2\cos 2x-2\cos 2x\cos x}{4\cos 2x}=\frac{1-\cos x}{2}=\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

2. Phần 2/ chứng minh tương tự như phần 1/. Bạn đọc hãy tự nghiệm lại điều ấy

Bài 19. Cho $a \neq 0$, $b \neq 0$ và thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases}(a+b)\sin(x-\alpha)=(a-b)\sin(x+\alpha)\\ a\tan\frac{x}{2}=c+b+\tan\frac{\alpha}{2}.\end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\sin\alpha=\frac{2bc}{a^2-b^2-c^2}$.

Giải

Từ hệ thức: $(a + b)\sin(x - \alpha) = (a - b)\sin(x + \alpha)$

$\Rightarrow a[\sin(x-\alpha)-\sin(x+\alpha)]=-b[\sin(x-\alpha)+\sin(x+\alpha)]$

$\Rightarrow -2a\cos x\sin\alpha=-2b\sin x\cos\alpha$

$\Rightarrow \tan x=\frac{a}{b}\tan\alpha$. (1)

Từ hệ thức $a\tan\frac{x}{2}=c+b\tan\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\tan\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \tan x=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\tan\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}$ (2)

Thay (2) vào (1) và có: $\frac{a}{b}\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\tan\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. (3)

Đặt $\tan\frac{\alpha}{2}=t$, khi đó (3) có dạng:

$\frac{2at}{b(1-t^2)}=\frac{2a(c+bt)}{a^2-(c+bt)^2} \Rightarrow \frac{t}{b(1-t^2)}=\frac{c+bt}{a^2-c^2-b^2t^2-2bct}$

$\Rightarrow a^2t-c^2t-b^2t^3-2bct^2=bc-b^2t^3-bct^2+b^2t$

$\Rightarrow (a^2-b^2-c^2)t=bc(1+t^2)$

$\Rightarrow \frac{t}{1+t^2}=\frac{bc}{a^2-b^2-c^2}$. (4)

Do $\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$, nên từ (4) suy ra $\sin\alpha=\frac{2bc}{a^2-b^2-c^2}$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 20. Cho $\cos\alpha = \tan\beta$; $\cos\beta = \tan\gamma$; $\cos\gamma = \tan\alpha$. Và $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chứng minh rằng: $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Giải

Đặt $x = \sin^2\alpha$; $y = \sin^2\beta$; $z = \sin^2\gamma$.

Từ giả thiết suy ra:

$$\begin{cases}\cos^2\alpha=\tan^2\beta\\ \cos^2\beta=\tan^2\gamma\\ \cos^2\gamma=\tan^2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2\alpha\cos^2\beta=\sin^2\beta\\ \cos^2\beta\cos^2\gamma=\sin^2\gamma\\ \cos^2\gamma\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-x)(1-y)=y & (1)\\ (1-y)(1-z)=z & (2)\\ (1-z)(1-x)=x. & (3)\end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $x=\frac{1-2y}{1-y}$. (4)

Từ (2) suy ra: $z=\frac{1-y}{2-y}$. (5)

Thay (4) (5) vào (3) và có: $\left(1-\frac{1-y}{2-y}\right)\left(1-\frac{1-2y}{1-y}\right)=\frac{1-2y}{1-y}$

$\Rightarrow y^2-3y+1=0.$ (6)

Do 0 < y < 1, nên từ (6) có: $y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\sin^2\beta$.

Do $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Tương tự có $\quad\sin\alpha=\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow$ đpcm.

Bài 21. Giả sử $\dfrac{\sin^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$.

Chứng minh: $\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

Giải

Viết lại giả thiết dưới dạng sau: $\dfrac{\sin^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{a+b}$,

hay $(a+b)(b\sin^4\alpha+a\cos^4\alpha)=ab(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$\Rightarrow a^2\cos^4\alpha+b^2\sin^4\alpha+ab(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha)+ab(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha)=0$

$\Rightarrow a^2\cos^4\alpha+b^2\sin^4\alpha-ab\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)-ab\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=0$

$\Rightarrow a^2\cos^4\alpha+b^2\sin^4\alpha-2ab\cos^2\alpha\sin^2\alpha=0$

$\Rightarrow (a\cos^2\alpha-b\sin^2\alpha)^2=0\Rightarrow a\cos^2\alpha-b\sin^2\alpha=0$

$\Rightarrow a(1-\sin^2\alpha)-b\sin^2\alpha=0$

$\Rightarrow \sin^2\alpha=\dfrac{a}{a+b}$. $\quad$ (1)

Lập luận tương tự, ta có: $\cos^2\alpha=\dfrac{b}{a+b}$. $\quad$ (2)

Từ (1) (2) đi đến: $\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{a}{(a+b)^4}+\dfrac{b}{(a+b)^4}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

Đó là đpcm.

Bài 22. Cho $a_1, a_2,\dots, a_n$ là các số thực. Xét hàm số:

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{2^2}\cos(a_3+x)+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x).$$

Giả sử $f(x_1)=f(x_2)=0$. Chứng minh rằng: $x_1-x_2=k\pi$, $k\in Z$.

Giải

Viết lại f(x) dưới dạng sau:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}\left\{\cos\left[(a_i+x_1)+(x-x_1)\right]\right\}$$

$$=\cos(x-x_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}\cos(a_i+x_1)-\sin(x-x_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}\sin(a_i+x_1)$$

$$=\cos(x-x_1)f(x_1)+\sin(x-x_1)f\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)\qquad(1)$$

(điều này suy từ hệ thức $\cos\left(a_1+\dfrac{\pi}{2}+x_1\right)=-\sin(a_1+x_1)$).

Ta sẽ chứng minh rằng $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x_1\right)\neq 0$. $\qquad$ (2)

Thật vậy nếu (2) không đúng, tức là $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x_2\right)=0$. Khi đó do $f(x_1)=0$ nên từ (1) suy ra $f(x)=0,\ \forall x$. $\qquad$ (3)

Mặt khác ta có: $f(-a_1)=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}\cos(a_i-a_1)$ $\qquad$ (4)

Do $\cos(a_i-a_1)\geq -1$, $\forall i=\overline{2,n}$, nên ta có $f(-a_n)\geq 1-\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}$. $\qquad$ (5)

Lại có $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1$. $\qquad$ (6)

Từ (5) (6) suy ra $\qquad f(-a_1)>0$. $\qquad$ (7)

Từ (3) (7) suy ra mâu thuẫn. Vậy giả thiết phản chứng là sai, tức (2) là đúng.

Do $f(x_2)=0$, nên từ (1) suy ra:

$$\cos(x_2-x_2)f(x_1)+\sin(x_2-x_1)f\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)=0\qquad(8)$$

Từ $f(x_1)=0$ và (8) đi đến $\sin(x_2-x_1)f\left(\dfrac{\pi}{2}+x_1\right)=0$ (9)

Bây giờ kết hợp (2) và (9) có: $\sin(x_2-x_1)=0$ hay $x_2-x_1=k\pi$, $k\in Z$.

Đó là đpcm.

Bài 23. Giả sử $0\leq\alpha\leq\beta\leq\gamma\leq 2\pi$ và thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\quad\gamma-\beta=\beta-\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

Công ty TNHH một thành viên dịch vụ văn hóa KHANG VIỆT
Nhà sách KHANG VIỆT

Giải

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma\\ \sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\cos^2\gamma \quad (1).\\ \sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\sin^2\gamma \quad (2)\end{cases}$$

Cộng từng vế (1) (2), đi đến $2+2\cos(\alpha-\beta)=1$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Hoàn toàn tương tự cũng có: $\cos(\beta-\gamma)=\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{1}{2}$ (4)

Do $0\le\alpha\le\beta\le\gamma\le 2\pi$, nên suy ra: $\beta-\alpha$; $\gamma-\beta$; $\gamma-\alpha$ đều thuộc $[0;2\pi]$

Vì vậy từ (3) (4) suy ra $\beta-\alpha$; $\gamma-\beta$; $\gamma-\alpha$ chỉ nhận một trong hai giá trị $\frac{2\pi}{3}$ hoặc $\frac{4\pi}{3}$.

Mặt khác $\gamma-\alpha=(\gamma-\beta)+(\beta-\alpha)\Rightarrow \gamma-\alpha=\frac{4\pi}{3}$ và $\gamma-\beta=\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

Đó là đpcm.

Bài 24. Cho $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$. Với mỗi n nguyên dương, đặt

$$S_n=1+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}+\ldots+\frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha}.$$

Chứng minh rằng: $S_n=\begin{cases}n+1, & \text{nếu } \alpha=k\pi\\ \dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha}, & \text{nếu } \alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}$

Giải

Ta có nhận xét sau: Với mọi số nguyên dương k, ta có:

$$\frac{\sin(k+1)\alpha}{\cos^k\alpha}=\frac{\sin k\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos k\alpha}{\cos^k\alpha}$$

$$=\frac{\sin k\alpha}{\cos^{k-1}\alpha}+\frac{\sin\alpha\cos k\alpha}{\cos^k\alpha} \qquad (1)$$

Cộng từng vế n đẳng thức dạng (1) với $k=\overline{1,n}$, đi đến

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k+1)\alpha}{\cos^k\alpha}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\alpha}{\cos^{k-1}\alpha}+\sin\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k\alpha}{\cos^k\alpha}. \qquad (2)$$

Từ (2) sau khi ước lượng số hạng giống nhau ở cả hai vế suy ra

$$\frac{\sin(n+1)\alpha}{\cos^n\alpha}=\sin\alpha+\sin\alpha(S_n-1)=S_n.\sin\alpha. \qquad (3)$$

Từ (3) dễ dàng thấy rằng nếu $\alpha\neq k\pi$ (và dĩ nhiên $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ theo giả thiết $\Rightarrow\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$), ta có: $S_n=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha}$.

Nếu $\alpha=k\pi$, ta thấy:

a. Nếu k chẵn thì $\cos k\pi=1\Rightarrow(\cos\alpha)^k=1$

b. Nếu k lẻ thì $\cos k\pi=-1\Rightarrow(\cos\alpha)^k=-1$

Từ đó suy ra với mọi k = 1, 2,..., n thì $\frac{\cos k\alpha}{\cos^k\alpha}=1$

Vì thế khi $\alpha=k\pi$, từ định nghĩa của S_n, ta có $S_n=n+1$

Tóm lại $S_n=\begin{cases}n+1, & \text{nếu } \alpha=k\pi\\ \dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha}, & \text{nếu } \alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}$

Đó là đpcm.

Chương 2. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§ 1. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN

Phương pháp giải các bài toán thuộc mục này cũng giống như phương pháp giải các bài toán trong chuyên mục "Chứng minh các đẳng thức lượng giác không điều kiện" nghĩa là cần kết hợp một cách nhuần nhuyễn giữa việc sử dụng các kiến thức và kĩ năng chứng minh bất đẳng thức với việc áp dụng linh hoạt các công thức biến đổi lượng giác cần thiết.

Bài 1. Không dùng bảng số hạng hay máy tính cá nhân, chứng minh rằng

$$\tan 34^0 > \frac{2}{3}.$$

Giải

Ta có: $\tan 34^0 = \tan(45^0 - 11^0) = \dfrac{1-\tan 11^0}{1+\tan 11^0}$. (1)

Từ (1) suy ra $\tan 34^0 > \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\tan 11^0}{1+\tan 11^0} > \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 3 - 3\tan 11^0 > 2 + 2\tan 11^0$

$\Leftrightarrow \tan 11^0 < \dfrac{1}{5}$. (2)

Đặt $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ với $0 < \alpha < 90^0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \tan 11^0 < \tan\alpha$

$\Leftrightarrow 11^0 < \alpha$ (3)

(vì α, 11^0 đều $\in (0; 90^0)$ và $y = \tan x$ là hàm đồng biến trong khoảng $(0; 90^0)$).

Ta có: $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \dfrac{5}{12}$.

Từ đó $\tan 4\alpha = \dfrac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \dfrac{120}{119} > 1$ (4)

Từ (4) suy ra $4\alpha > 45^0 \Rightarrow \alpha > \dfrac{45^0}{4} > 11^0$.

Vậy (3) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 2. Không dùng bảng số hay máy tính cá nhân, chứng minh rằng $\tan 55^0 > \dfrac{7}{5}$.

Giải

Ta có: $\tan 55^0 = \tan(45^0 + 10^0) = \dfrac{1+\tan 10^0}{1-\tan 10^0}$

$= \dfrac{1+\tan\frac{\pi}{18}}{1-\tan\frac{\pi}{18}}$ (1)

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Khi đó $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$.

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x		1	
f'(x)	+	‖	+
f(x)	↗	‖	↗

Áp dụng bất đẳng thức kinh điển:

$\tan\alpha > \alpha$ nếu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{18} > \dfrac{\pi}{18} > \dfrac{1}{6}$.

Vì $\tan\dfrac{\pi}{8}$ và $\dfrac{1}{6}$ đều thuộc $(-\infty; 1)$, nên từ bảng biến thiên trên suy ra

$f\left(\tan\dfrac{\pi}{18}\right) > f\left(\dfrac{1}{6}\right) \Rightarrow \dfrac{1+\tan\frac{\pi}{18}}{1-\tan\frac{\pi}{18}} > \dfrac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \dfrac{7}{5}$. (2)

Từ (1) (2) đi đến $\tan 55^0 > \dfrac{7}{5} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 3. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{3} < \sin 20^0 < \dfrac{7}{20}$.

Giải

Xét hàm số $y = 3x - 4x^3$

$y' = 3 - 12x^2$

Từ đó có bảng biến thiên sau:

Công ty TNHH một thành viên dịch vụ văn hóa Khang Việt – Nhà sách KHANG VIỆT

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
y'	–	0	+	0	
y	↘		↗		↘

Để ý rằng $0 < \sin 20^0 < \sin 30^0 = \frac{1}{2}$, nên $\frac{1}{3}$, $\sin 20^0$, $\frac{7}{20}$ đều thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Từ đó dựa vào tính đồng biến của hàm số $y = 3x - 4x^3$ suy ra:

$$\frac{1}{3} < \sin 20^0 < \frac{7}{20} \Leftrightarrow y\left(\frac{1}{3}\right) < y(\sin 20^0) < y\left(\frac{7}{20}\right). \qquad (1)$$

Áp dụng công thức $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, ta có:

$$y(\sin 20^0) = 3\sin 20^0 - 4\sin^3 20 = \sin 60^0, \text{ nên}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{23}{27} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1757}{2000}$$

$$\Leftrightarrow \frac{46}{27} < \sqrt{3} < 1{,}757... \qquad (2)$$

Vì $\sqrt{3} = 1{,}732...$, nên (2) hiển nhiên đúng ⇒ đpcm.

Bài 4. Chứng minh rằng: $\dfrac{1 - \sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}} > \sqrt{3\cos\frac{\pi}{7}}$.

Giải

$$1 - \sin\frac{\pi}{14} = \sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{3\pi}{14} + \sin\frac{7\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right). \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $\dfrac{1 - \sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}} = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$. (2)

Ta lại có: $\cos\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right)$

(do $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$)

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} \qquad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra $\dfrac{1 - \sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}} > \sqrt{3\cos\frac{\pi}{7}}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} > \sqrt{3\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\right)} \quad (4)$$

Đặt $x = \cos\frac{\pi}{7}$, $y = \cos\frac{2\pi}{7}$, $z = \cos\frac{3\pi}{7}$ khi đó rõ ràng $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Vì thế: $(4) \Leftrightarrow x + y + z > \sqrt{3(xy + yz + zx)}$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 > 3(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 > 0. \qquad (5)$$

Vì $x > y > z > 0$, nên (5) hiển nhiên đúng ⇒ đpcm.

Bài 5. Chứng minh rằng $\cos 38^0 > \tan 38^0$ (không dùng bảng số hay máy tính).

Giải

Giả sử $0 < x_0 < 90^0$ là góc mà $\cos x_0 > \tan x_0$ (1)

Từ (1) ta có: $\cos x_0 = \dfrac{\sin x_0}{\cos x_0}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x_0 = \sin x_0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x_0 = \sin x_0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x_0 + \sin x_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad (\text{do } 0 < x_0 < 90^0)$$

Do vậy $\cos x_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}}$.

Do tính đồng biến của hàm số $y = \tan x$ và nghịch biến của hàm số $y = \cos x$ khi $0 < x < 90^0$, nên từ (1), ta có:

$\cos\alpha > \tan\alpha$ nếu $0 < \alpha < x_0 < 90^0$. (2)

Ta có nhận xét sau: $\cos 36^0 > \tan 36^0$ (3)

Thật vậy $(3) \Leftrightarrow \cos^2 36^0 > \tan^2 36^0$ (do $\cos 36^0$ và $\tan 36^0$ đều là các số dương)

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 72^0}{2} > \frac{1 - \cos 72^0}{1 + \cos 72^0}$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos 72^0) - 2(1 - \cos 72^0) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 72^0 + 4\cos 72^0 - 1 > 0 \qquad (4)$$

Vì $4\cos 72^0\cos 36^0 = \dfrac{4\sin 36^0\cos 36^0\cos 72^0}{\sin 36^0} = \dfrac{\sin 144^0}{\sin 36^0} = 1$

$$\Rightarrow 4\cos 72^0 = \frac{1}{\cos 36^0} > 1. \qquad (5)$$

Từ (5) suy ra (4) đúng vậy nhận xét (3) được chứng minh

Bây giờ từ (2), (3) suy ra $x_0 > 36^0$. (6)

Đặt $x_1 = x_0 - 36^0$.

Khi đó $\sin x_1 = \sin(x_0 - 36^0) = \sin x_0 \cos 36^0 - \sin 36^0 \cos x_0$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cos 36^0 - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sin 36^0. \ (7)$$

Như đã biết $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$$\Rightarrow \sin 36^0 = \sqrt{1 - \sin 36^0} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Thay vào (7) ta có: $\sin x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)^2}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\sqrt[4]{5}. \qquad (8)$$

Có thể chứng minh rằng $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\sqrt[4]{5} > \frac{7}{200}$. (9)

Từ (8) (9) suy ra $\sin x_1 > \frac{7}{200} > \frac{\pi}{90}$. (10)

Do $\sin\frac{\pi}{90} < \frac{\pi}{90^0}$, nên từ (10) suy ra $\sin x_1 > \sin\frac{\pi}{90^0}$

$\Rightarrow x_1 > \frac{\pi}{90}$ hay $x_1 > 2^0$

$\Rightarrow x_0 - 36^0 > 2^0$

$\Rightarrow x_0 > 38^0$ (11)

Từ (2) và (11) suy ra $\cos 38^0 > \tan 38^0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi α, ta có:

$4\sin 3\alpha + 5 \geq 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha$.

Giải

Ta có: $4\sin 3\alpha + 5 \geq 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 4(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) + 5 \geq 4(1 - 2\sin^2\alpha) + 5\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 16\sin^3\alpha - 8\sin^2\alpha - 7\sin\alpha - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow (\sin\alpha - 1)(4\sin\alpha + 1)^2 \leq 0$. (1)

Vì $\sin\alpha \leq 1 \ \forall\alpha$, nên (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 1\\ \sin\alpha = -\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi\\ \left[\begin{array}{l}\alpha = -\arcsin\frac{1}{4} + k2\pi\\ \alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{4} + k2\pi\end{array}\right.\end{array}\right.$, $k \in Z$

Bài 7. Cho $0 \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2} \ \forall i = \overline{1, n}$

Chứng minh: $m \leq \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + ... + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + ... + \cos\alpha_n} \leq M$, ở đây

$M = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \tan\alpha_i$; $m = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \tan\alpha_i$.

Giải

Ta có: $\forall i = \overline{1, n}$

$m \leq \tan\alpha_i \leq M$

$\Rightarrow m \leq \frac{\sin\alpha_i}{\cos\alpha_i} \leq M$. (1)

Vì $0 \leq \alpha_i < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$, nên

(1) $\Leftrightarrow m\cos\alpha_i \leq \sin\alpha_i \leq M\cos\alpha_i$ (2)

Cộng các bất đẳng thức dạng (2) khi $i = \overline{1, n}$, ta có:

$m(\cos\alpha_1 + ... + \cos\alpha_n) \leq \sin\alpha_1 + ... + \sin\alpha_n \leq M(\cos\alpha_1 + ... + \cos\alpha_n)$.

$\Rightarrow m \leq \frac{\sin\alpha_1 + ... + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + ... + \cos\alpha_n} \leq M \Rightarrow$ đpcm (do $\cos\alpha_1 + ... + \cos\alpha_n > 0$).

Bài 8. Chứng minh rằng nếu là số tự nhiên ≥ 2, ta có:

$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1$.

Giải

Ta có: $(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1$

$\Leftrightarrow n\left(\cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{\pi}{n}\right) > 1 - \cos\frac{\pi}{n+1}$

$\Leftrightarrow 2n.\sin\left(\frac{\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1}}{2}\right) > 2\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}$

$$\Leftrightarrow n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)} > \sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}. \quad (1)$$

Rõ ràng ta có: $\frac{\pi}{2} > \frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)} > \frac{\pi}{2(n+1)}$ (vì $n \geq 2$)

$$\Rightarrow \sin\frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)} > \sin\frac{\pi}{2(n+1)} > 0. \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh rằng: $n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)} > \sin\frac{\pi}{2(n+1)}$ (3).

Khi đó suy ra (1) đúng và đó là đpcm

Vậy ta sẽ chứng minh (3) là đúng khi $n \geq 2$.

Ta có: (3) $\Leftrightarrow n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)} > \sin\left(n\frac{\pi}{2n(n+1)}\right)$ (4)

Đặt $\alpha = \frac{\pi}{2n(n+1)}$, thì (4) $\Leftrightarrow n\sin\alpha > \sin(n\alpha)$. (5)

Ta sẽ chứng minh (5) bằng quy nạp với $n \geq 2$

* Với n = 2, thì (5) có dạng

$2\sin\alpha > \sin 2\alpha$ (6)

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha > 2\sin\alpha\cos\alpha$

Khi n = 2, thì $\alpha = \frac{\pi}{12}$, do đó (6) $\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{12} > \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

$$\Leftrightarrow 1 > \cos\frac{\pi}{12} \quad \left(\text{vì } \sin\frac{\pi}{12} > 0\right).$$

Vậy (6) đúng $\Rightarrow$ (5) đúng khi n = 2.

* Giả sử (5) đã đúng khi n = k, tức là ta có: $k\sin\alpha > \sin(k\alpha)$.

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$(k+1)\sin\alpha = k\sin\alpha + \sin\alpha > \sin(k\alpha) + \sin\alpha$

$$\Rightarrow (k+1)\sin\alpha > 2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k-1)\alpha}{2}. \quad (7)$$

Dễ thấy $\frac{\pi}{2} > \frac{k+1}{2}\alpha > \frac{k-1}{2}\alpha > 0 \Rightarrow \cos\frac{k+1}{2}\alpha < \cos\frac{k-1}{2}\alpha$.

Từ đó VP (7) $> 2\sin\frac{k+1}{2}\alpha\cos\frac{k+1}{2}\alpha = \sin(k+1)\alpha$

$\Rightarrow (k+1)\sin\alpha > \sin(k+1)\alpha$.

Như thế (5) cũng đúng khi n = k + 1.

Theo nguyên lý quy nạp thì (5) đúng $\forall n \geq 2$.

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 9. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh:

1. $\sin\alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$
2. $\alpha\sin\alpha + \cos\alpha > 1$
3. $\sin\alpha > \frac{2\alpha}{\pi}$
4. $2^{\sin\alpha} + 2^{\tan\alpha} > 2^{\alpha+1}$.

Giải

1. Xét hàm số $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2}$.

Theo bất đẳng thức cơ bản (do $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$) nên $\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} > 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) > 0\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

và do f(x) liên tục tại x = 0, nên ta có:

$f(x) > f(0) \Rightarrow \sin\alpha - \alpha + \frac{\alpha^3}{6} > 0 \Rightarrow \sin\alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ đpcm.

2. Xét hàm số $f(x) = x\sin x + \cos x$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có: $f'(x) = x\cos x + \sin x - \sin x = x\cos x > 0\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Rõ ràng f(x) liên tục tại x = 0, nên từ $\alpha > 0$ suy ra $f(\alpha) > f(0)$

$\Rightarrow \alpha\sin\alpha + \cos\alpha > 1 \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Ta có cách chứng minh khác như sau:

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha < \alpha$

$\Rightarrow \alpha\sin\alpha > \sin^2\alpha$. (1)

Lại có $\cos\alpha > \cos^2\alpha$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\alpha\sin\alpha + \cos\alpha > 1 \Rightarrow$ đpcm.

3. Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2}$.

Do $0 < x < \frac{\pi}{2}$, nên theo bất đẳng thức cơ bản ta có: $\tan x > x$.

Từ đó suy ra $f'(x) < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do f(x) liên tục tại $x = \frac{\pi}{2}$ nên khi

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\alpha) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \sin\alpha > \frac{2\alpha}{\pi} \Rightarrow$ đpcm.

4. Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$2^{\sin\alpha} + 2^{\tan\alpha} > 2\sqrt{2^{\sin\alpha + \tan\alpha}}$ (1)

(vì khi $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$).

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq 0$

Vậy f(x) là hàm đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\alpha + \tan\alpha - 2\alpha > 0$

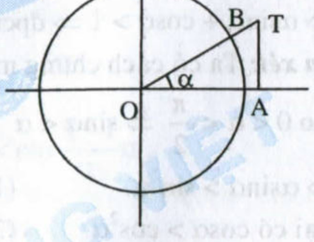
$\Rightarrow \sin\alpha + \tan\alpha > 2\alpha$. (2)

Thay (2) vào (1) và có đpcm.

Chú ý: Ta luôn sử dụng bất đẳng thức cơ bản sau:

Nếu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$. (3)

Bất đẳng thức này ngoài việc chứng minh bằng cách sử dụng đạo hàm, ta còn có cách giải khác sau đây.



Trên đường tròn đơn vị đặt $\overline{BOA} = \alpha$

Khi đó ta có: $S_{OAT} = S_{\text{quạt } OAB} > S_{\Delta OAB}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.AT > \frac{\pi.\alpha}{2\pi} > \frac{1}{2}OA^2\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \tan\alpha > \alpha > \sin\alpha$

(do OA = 1; AT = tanα).

Vậy (3) được chứng minh.

Bài 10. Chứng minh $4\tan 5^0\tan 9^0 < 3\tan 6^0\tan 10^0$

Giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ với $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Ta có: $f'(x) = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x} > 0, \forall 0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Vậy f(x) là hàm đồng biến khi $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Do đó ta có:

$$f\left(\frac{5\pi}{180}\right) < f\left(\frac{6\pi}{180}\right) \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}} < \frac{\tan\frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}}$$

$\Leftrightarrow 6\tan 5^0 < 5\tan 6^0$. (1)

Lập luận tương tự có: $10\tan 9^0 < 9\tan 10^0$. (2)

Nhân từng vế (1) (2) và có đpcm.

Bài 11. Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x + 2y < \frac{5\pi}{4}$. Chứng minh $\cos(x + y) < \frac{y\sin x}{x\sin y}$.

Giải

Do $x > 0$, $y > 0$ và $x + 2y < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow 0 < y < \frac{5\pi}{8}$ nên $\sin y > 0$, vì thế

$\cos(x + y) < \frac{y\sin x}{x\sin y}$

$\Leftrightarrow x\cos(x + y)\sin y < y\sin x$

$\Leftrightarrow x\frac{\sin(x + 2y) - \sin x}{2} < y\sin x$

$\Leftrightarrow x\sin(x + 2y) < x\sin x + 2y\sin x = (x + 2y)\sin x$

$\Leftrightarrow \frac{\sin(x + 2y)}{x + 2y} < \frac{\sin x}{x}$ (1) (do $x > 0$, $x + 2y > 0$).

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ với $0 < t < \frac{5\pi}{4}$.

Ta có: $f'(t) = \frac{\cos t(t - \tan t)}{t^2}$ khi $t \neq \frac{\pi}{2}$

Ta có $t < \tan t$ khi $0 < t < \frac{\pi}{2}$ và $t > \tan t$ nếu $\frac{\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{4}$

Mặt khác $\cos t > 0$ khi $0 < t < \frac{\pi}{2}$ và $\cos t < 0$ khi $\frac{\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{4}$,

và do $f'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} < 0$.

Do đó $f'(t) < 0\ \forall\ 0 < t < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$

Vì $0 < x < x + 2y < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow f(x + 2y) < f(x)$ vậy (1) đúng ⇒ đpcm.

Bài 12. Chứng minh: $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$.

Giải

Ta có: $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ (1)

Vì $0 < \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \sin^2\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{3}{16}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{8}$. (3)

Lại có $\sin\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ (4) $\left(\text{do } 0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$

Từ (3) (4) suy ra $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{1}{2} > \frac{1}{8} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 13. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh:

1. $\sin 2\alpha < \frac{2}{3\alpha - \alpha^3}$;
2. $\tan\alpha - \sin\alpha > \frac{\alpha^3}{6}$.

Giải

1. Giải như bài 9 bằng cách xét hàm số $f(x) = 3x - x^2$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$).
2. Giải như bài 9 bằng cách xét hàm số $f(x) = \tan x - \sin x - \frac{x^3}{6}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$).

Bài 14. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$f(x) = \sin x\cos^3 x$ với $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Giải

Do $f(x) \ge 0\ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nên

$\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}} f(x) = \sqrt{\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}} f^2(x)}$. (1)

Ta có: $f^2(x) = \sin^2 x\cos^6 x = (1 - \cos^2 x)\cos^6 x$

Đặt $t = \cos^2 x$, khi đó từ $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le t \le 1$

Xét hàm số $F(t) = t^3(1 - t) = t^3 - t^4$, với $0 \le t \le 1$.

Ta có: $F'(t) = 3t^2 - 4t^3 = t^2(3 - 4t)$, và có bảng biến thiên sau:

x	0		$\frac{3}{4}$		1
F'(t)		+	0	−	
F(t)		↗		↘	

Vậy $\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}} f^2(x) = \max\limits_{0\le t\le 1} F(t) = F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{256}$

$\Rightarrow \max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

Nhận xét: Ta có cách khác giải bài trên như sau:

Ta có: $f^2(x) = \sin^2 x.\cos^6 x = \sin^2 x(1 - \sin^2 x)^3$

$$= 27\sin^2 x\left(\frac{1-\sin^2 x}{3}\right)\left(\frac{1-\sin^2 x}{3}\right)\left(\frac{1-\sin^2 x}{3}\right).$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$f^2(x) \le 27\left[\frac{\sin^2 x + \frac{1-\sin^2 x}{3} + \frac{1-\sin^2 x}{3} + \frac{1-\sin^2 x}{3}}{4}\right]^4 = \frac{27}{256}$$

Vậy $\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}} f(x) = \sqrt{\frac{27}{256}} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1-\sin^2 x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

Bài 15. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$, $x \in R$.

Giải

Do $f(x) > 0\ \forall x \in R$, ta có:

$\max\limits_{x\in R} f(x) = \sqrt{\max\limits_{x\in R} f^2(x)}$; $\min\limits_{x\in R} f(x) = \sqrt{\min\limits_{x\in R} f^2(x)}$. (1)

Ta có: $f^2(x) = 2 + (\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1 + (\sin x + \cos x) + \sin x\cos x}$

Đặt $t = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ và có $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Xét hàm số $F(t) = 2 + t + 2\sqrt{1 + t + \dfrac{t^2 - 1}{2}}$

$$= 2 + t + \sqrt{2t^2 + 4t + 2}$$

$$= 2 + t + \sqrt{2}|t + 1|, \text{ với } -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}.$$

Lập bảng biến thiên sau đây:

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
F(t)		$(1-\sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}$		$(1+\sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}$	
F'(t)		−		+	
F(t)		↘		↗	

Vậy $\max\limits_{x \in R} f(x) = \sqrt{\max\limits_{|t| \le \sqrt{2}} F(t)} = \sqrt{\max\left\{F(-\sqrt{2}); F(2)\right\}}$

$$= \sqrt{\max\left\{4 - 2\sqrt{2}; 4 + 2\sqrt{2}\right\}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}},$$

$$\min_{x \in R} f(x) = \sqrt{\min_{|t| \le \sqrt{2}} F(t)} = \sqrt{F(-1)} = \sqrt{2} = 1.$$

Như thế $\max\limits_{x \in R} f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z;$$

$$\min_{x \in R} f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Bài 16. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|,\ x \in R.$$

Giải

Giải tương tự như bài 13.

$$\max_{x \in R} f(x) = \sqrt{\max_{x \in R} f^2(x)};\ \min_{x \in R} f(x) = \sqrt{\min_{x \in R} f^2(x)}$$

Đáp số: $\max\limits_{x \in R} f(x) = 2(\sqrt{2} + 1);$

$$\min_{x \in R} f(x) = \sqrt{3} - 1.$$

Bài 17. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 + \cos 2\alpha} + \frac{1}{1 + \cos 4\alpha} + \frac{1}{1 - \cos 6\alpha} > 2 \text{ nếu như vế trái có nghĩa.}$$

Giải

Đặt $a = 1 + \cos 2\alpha$; $b = 1 + \cos 4\alpha$; $c = 1 - \cos 6\alpha$.

Do $a \ge 0$; $b \ge 0$, $c \ge 0$ và do vế trái có nghĩa nên $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Ta có: $a + b + c = 3 + (\cos 4\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha)$

$$= 3 + 1 - 2\sin^2 2\alpha - 2\sin 4\alpha \sin 2\alpha$$

$$= 4 - 2\left(\sin^2 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2 4\alpha\right) + \frac{1}{2}\sin^2 4\alpha$$

$$= 4 - 2\left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 4\alpha\right)^2 + \frac{1}{2}\sin^2 4\alpha. \quad (1)$$

Từ (1) có: $a + b + c \le \dfrac{9}{2}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha + \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha = 0 \\ \sin^2 4\alpha = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = -\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha & (3) \\ \sin^2 4\alpha = 1 & (4) \end{cases}$$

Từ (4) suy ra $\cos 4\alpha = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin^2 2\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ hệ (3), (4) vô nghiệm.

Do đó từ (2) có: $a + b + c < \dfrac{9}{2}$. (5)

Vì $a, b, c > 0 \Rightarrow a + b + c > 0$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9. \quad (6)$$

Từ (5) (6) đi đến $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \cos 2\alpha} + \frac{1}{1 + \cos 4\alpha} + \frac{1}{1 - \cos 6\alpha} > 2. \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 18. Cho α, β, γ đôi một khác nhau và khác $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{\cos^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)} + \dfrac{\cos^2(\beta + \gamma)}{\sin^2(\beta - \gamma)} + \dfrac{\cos^2(\gamma + \alpha)}{\sin^2(\gamma - \alpha)} \ge 2$

Giải

Ta có: $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$.

Vì thế $\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}+\dfrac{\cos^2(\beta+\gamma)}{\sin^2(\beta-\gamma)}+\dfrac{\cos^2(\gamma+\alpha)}{\sin^2(\gamma-\alpha)}\geq 2$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}\right)^2+\left(\dfrac{1-\tan\beta\tan\gamma}{\tan\beta-\tan\gamma}\right)^2+\left(\dfrac{1-\tan\gamma\tan\alpha}{\tan\gamma-\tan\alpha}\right)^2\geq 2$. (2)

Đặt $x=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$; $y=\dfrac{1-\tan\beta\tan\gamma}{\tan\beta-\tan\gamma}$; $z=\dfrac{1-\tan\gamma\tan\alpha}{\tan\gamma-\tan\alpha}$

Khi ấy dễ thấy $xy + yz + zx = -1$ (3)

(điều này suy ra từ $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x - 1)(y - 1)(z - 1)$)

Hiển nhiên ta có: $x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) = 2$ (4)

Từ (3) (4) suy ra (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x + y + z = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}+\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}+\frac{\cos(\gamma+\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)}=0.$$

Bài 19. Cho α và β là hai số thực và k là số tự nhiên.

Chứng minh bất đẳng thức sau (nếu vế trái của nó có nghĩa)

$$\frac{\cos k\beta\cos\alpha-\cos k\alpha\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}<k^2-1.$$

Giải

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh (n là số nguyên dương, x bất kì)

$|\sin nx| \leq n|\sin x|$. (1)

- (1) rõ ràng đúng khi n = 1.
- Giả sử (1) đã đúng đến n = p, tức là
  $|\sin px| \leq p|\sin x|$. (2)
- Xét khi n = p + 1

Ta có:

$|\sin(p+1)x| = |\sin px\cos x + \sin x\cos px| = |\sin px||\cos x| + |\sin x||\cos px|$

$\leq |\sin px| + |\sin x|$

$\leq p|\sin x| + |\sin x| = (p+1)|\sin x|$. (theo (2))

Vậy (1) cũng đúng khi n = p + 1.

Theo nguyên lý quy nạp suy ra (1) đúng ∀n nguyên dương, ∀x ∈ R

Áp dụng (1) với các số tự nhiên r, s ta có ∀x ≠ kπ

$\left|\dfrac{\sin rx}{\sin x}\right|\leq r$; $\left|\dfrac{\sin sy}{\sin y}\right|\leq s$. (3)

Từ (3) suy ra ∀ x, y ≠ kπ, ta có:

$\left|\dfrac{\sin rx\sin sy}{\sin x\sin y}\right|\leq rs$, (4)

$\left|\dfrac{\sin ry\sin sx}{\sin x\sin y}\right|\leq rs$. (5)

Từ (4) (5) suy ra:

$$\left|\frac{\sin rx\sin sy+\sin ry\sin sx}{\sin x\sin y}\right|\leq\left|\frac{\sin rx\sin sy}{\sin x\sin y}\right|+\left|\frac{\sin ry\sin rx}{\sin x\sin y}\right|\leq 2rs$$

Vậy ∀r, s nguyên dương, ∀x, y ≠ kπ, ta có:

$\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\sin ry\sin sx+\sin rx\sin sy}{\sin y\sin x}\right|\leq rs$ (6)

Trong (6) thay r = k + 1; s = k – 1; $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ta có:

$\sin ry\sin sx$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{(k+\alpha)(\alpha-\beta)-(k-1)(\alpha+\beta)}{2}-\cos\frac{(k+1)(\alpha-\beta)+(k-1)(\alpha+\beta)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-k\beta)-\cos(k\alpha-\beta)]$$

Tương tự cũng có: $\sin rx\sin sy=\dfrac{1}{2}[\cos(k\beta+\alpha)-\cos(k\alpha+\beta)]$.

Lại có $2\sin y\sin x = \cos(y - x) - \cos(y + x) = \cos\beta - \cos\alpha$ (7)

Từ trên ta có: $\sin ry\sin sx + \sin rx\sin sy = \cos\alpha\cos k\beta - \cos k\alpha\cos\beta$ (8)

Thay (7) (8) vào (6) và có: $\dfrac{\cos k\beta\cos\alpha-\cos k\alpha\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}\leq k^2-1$.

Đó là đpcm.

Bài 20. Cho hàm số f(x) = cos2x + acos(x + α).

Chứng minh rằng: $\left(\min\limits_{x\in R} f(x)\right)^2+\left(\max\limits_{x\in R} f(x)\right)^2\geq 2$.

Giải

Ta có: $f(0) = 1 + a\cos\alpha$

$f(\pi) = 1 + a\cos(\alpha + \pi) = 1 - a\cos\alpha$

$\Rightarrow f(0) + f(\pi) = 2 \Rightarrow \max\{f(0), f(\pi)\} \geq 1$. (1)

Lại có: $\max\limits_{x\in R} f(x) \geq \max\{f(0), f(\pi)\}$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $\max\limits_{x\in R} f(x) \ge 1$

$$\Rightarrow \left\{\max_{x\in R} f(x)\right\}^2 \ge 1. \qquad (3)$$

Mặt khác cũng có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + a\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -1 - a\sin\alpha$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + a\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -1 + a\sin\alpha$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Rightarrow \min\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right); f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \le -1. \qquad (4)$$

Từ (4) đi đến $\min\limits_{x\in R} f(x) \le \min\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right);\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \le -1$

$$\Rightarrow \left(\min_{x\in R} f(x)\right)^2 \ge 1. \qquad (5)$$

Bây giờ từ (3), (5) có đpcm.

Bài 21. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số

$$f(x) = \left|\frac{\sin 2x + \cos 2x - 1}{2 + \sin 2x}\right| \text{ với } x \in R.$$

Giải

Ta có (hiển nhiên) $f(x) \ge 0, \forall x \in R$.

Mặt khác phương trình $\sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1$$

chắc chắn có nghiệm (vì dựa vào mệnh đề quen biết sau:

Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2$)

Như vậy tồn tại $x_0 \in R$ sao cho $\sin 2x_0 + \cos 2x_0 - 1 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$

Như vậy ta đi đến $\min\limits_{x\in R} f(x) = 0$.

Gọi m là một giá trị tùy ý của hàm số $y = \dfrac{\sin 2x + \cos 2x - 1}{2 + \sin 2x}$.

Khi đó phương trình sau đây (ẩn x) $\dfrac{\sin 2x + \cos 2x - 1}{2 + \sin 2x} = m$ (1) có nghiệm

Dễ thấy do $2 + \sin 2x > 0\ \forall x$, nên

$(1) \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x - 1 = m(2 + \sin 2x)$

$$\Leftrightarrow (m - 1)\sin 2x - \cos 2x - 1 + 2m = 0. \qquad (2)$$

(2) (tức là (1) có nghiệm khi: $(m - 1)^2 + 1 \ge (1 - 2m)^2$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le m \le 1.$$

Sử dụng công thức: $\max\limits_{x\in R}|y| = \max\left\{\left|\max\limits_{x\in R} y\right|; \left|\min\limits_{x\in R} y\right|\right\}$

Ta có: $\max\limits_{x\in R} f(x) = \max\left\{|-1|; \left|-\frac{1}{3}\right|\right\} = 1.$

Vậy $\max\limits_{x\in R} f(x) = 1;\ \min\limits_{x\in R} f(x) = 0$.

Bài 22.

1. Tìm a, b, c để hàm số

$$f(x) = \sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x + c} + \sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c} \text{ xác định } \forall x \in R.$$

2. Với a, b, c tìm được ở câu 1 hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$F(x) = f(x) + \frac{m}{2}\sin 2x \text{ khi } x \in R.$$

Giải

1. $\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x + c}$ xác định $\forall x \in R$ khi và chỉ khi

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c \ge 0,\ \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow a\frac{1 + \cos 2x}{2} + b\frac{1 - \cos 2x}{2} + c \ge 0\ \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + b + 2c}{2} + \frac{1}{2}(a - b)\cos 2x \ge 0\ \ \forall x \in R. \qquad (1)$$

Dễ thấy (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a + b + 2c}{2} + \dfrac{1}{2}\min[(a - b)\cos 2x] \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a + b + 2c}{2} - \frac{|a - b|}{2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + 2c - |a - b| \ge 0$$

$$\Leftrightarrow c + \min(a - b) \ge 0. \qquad (2)$$

Vì (2) cũng chính là điều kiện để $\sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c}$ xác định $\forall\, x \in R$, nên (2) là điều kiện cần và đủ để f(x) xác định $\forall x \in R$.

2. Với điều kiện (2) xét hàm số

$$F(x) = \sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x + c} + \sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c} + \frac{m}{2}\sin 2x,$$

với $x \in R$.

Vì $f(x) \ge 0\ \forall\, x \in R$, nên ta xét hàm số:

$g(x) = f^2(x) = a + b + 2c +$

$$2\sqrt{\left[\frac{a + b + c}{2} + \frac{1}{2}(a - b)\cos 2x\right]\left[\frac{a + b + 2c}{2} + \frac{1}{2}(b - a)\cos 2x\right]}$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2\cos^2 2x} + (a+b+2c). \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra $\max\limits_{x\in R} g(x) = 2(a+b+2c) \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$$\Rightarrow \max_{x\in R} f(x) = \sqrt{\max_{x\in R} g(x)} = \sqrt{2(a+b+2c)} \Leftrightarrow \cos 2x = 0.$$

Xét hai khả năng sau:

1. Nếu $m \geq 0 \Rightarrow \max\limits_{x\in R}\left(\frac{m}{2}\sin 2x\right) = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = 1.$

Vì hệ phương trình $\begin{cases}\sin 2x = 1\\ \cos 2x = 0\end{cases}$ có nghiệm (thí dụ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là nghiệm của nó)

Do vậy trong trường hợp này, ta có:

$$\max_{x\in R} F(x) = \frac{m}{2} + \max_{x\in R} f(x) = \sqrt{2(a+b+2c)} + \frac{m}{2}.$$

2. Nếu $m < 0 \Rightarrow \max\limits_{x\in R}\left(\frac{m}{2}\sin 2x\right) = -\frac{m}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

Mặt khác lúc này hệ phương trình $\begin{cases}\sin 2x = -1\\ \cos 2x = 0\end{cases}$

cũng có nghiệm (thí dụ $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ là nghiệm của nó).

Vì thế trong trường hợp này ta có:

$$\max_{x\in R} F(x) = -\frac{m}{2} + \max_{x\in R} f(x) = -\frac{m}{2} + \sqrt{2(a+b+2c)}.$$

Kết hợp lại, ta đi đến kết quả sau: $\max\limits_{x\in R} F(x) = \frac{1}{2}|m| + \sqrt{2(a+b+2c)}.$

Bài 23. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$P = \sin^2(x+y)\cos(x-y) + \sin^2(x-y)\cos(x+y)$ khi x, y ∈ R.

Giải

Ta có:

$$2P = \cos(x-y)[1 - \cos(2x+2y)] + \cos(x+y)[1 - \cos(2x-2y)]$$

$$= \cos(x-y) - \cos(x-y)[2\cos^2(x+y) - 1] +$$

$$\cos(x+y) - \cos(x+y)[2\cos^2(x-y) - 1]$$

$$= 4\cos x\cos y - 4\cos x\cos y(\cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y).$$

Vậy $P = 2\cos x\cos y[2 - (\cos^2 x + \cos^2 y)]$

$$\Rightarrow |P| = 2|\cos x||\cos y|\left(2 - (\cos^2 x + \cos^2 y)\right) \qquad (1)$$

(do $2 - (\cos^2 x + \cos^2 y) \geq 0$ ∀ x, y ∈ R).

Từ (1) và theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$|P| \leq (\cos^2 x + \cos^2 y)\left[2 - (\cos^2 x + \cos^2 y)\right].$$

Lại theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$(\cos^2 x + \cos^2 y)\left[2 - (\cos^2 x + \cos^2 y)\right]$$

$$\leq \left\{\frac{(\cos^2 x + \cos^2 y) + \left[2 - (\cos^2 x + \cos^2 y)\right]}{2}\right\}^2 = 1.$$

Vậy |P| ≤ 1, ∀ x, y ∈ R

$\Rightarrow -1 \leq P \leq 1$ ∀x, y ∈ R.

Khi $x = y = \frac{\pi}{4}$ thì P = 1, khi $x = \frac{\pi}{4}$; $y = -\frac{\pi}{4}$ thì P = −1.

Vậy $\max\limits_{x,y\in R} P = 1$ và $\min\limits_{x,y\in R} P = -1$.

Bài 24. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{\sin x - \sin y}{1 - \sin x\sin y}$ khi $x, y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và P có nghĩa.

Giải

Dễ thấy 1 − sinxsiny > 0 với giả thiết đã cho.

Hiển nhiên ta có: $(\sin^2 x - 1)(\sin^2 y - 1) \geq 0$

$\Rightarrow \sin^2 x\sin^2 y + 1 \geq \sin^2 x + \sin^2 y$

$\Rightarrow (1 - \sin x\sin y)^2 \geq (\sin x - \sin y)^2.$

Từ đó dễ dàng suy ra $-1 \leq \frac{\sin x - \sin y}{1 - \sin x\sin y} \leq 1$ hay $-1 \leq P \leq 1$.

Lại có khi x = 0; $y = \frac{\pi}{2}$ thì P = −1; còn khi $x = \frac{\pi}{2}$, y = 0 thì P = 1.

Từ đó đi đến kết quả sau: max P = 1; min P = −1.

Bài 25. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = \sqrt{1 + 2\cos^2 x} + \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$ khi x ∈ R.

Giải

Gọi m là giá trị tùy ý của hàm số, khi đó phương trình sau đây (ẩn x)

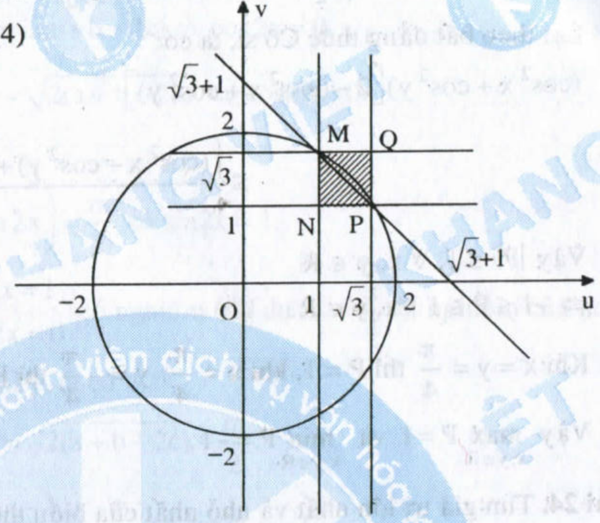
$\sqrt{1 + 2\cos^2 x} + \sqrt{1 + 2\sin^2 x} = m$ (1) có nghiệm.

Đặt $u = \sqrt{1 + 2\cos^2 x}$; $v = \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$.

Khi đó (1) có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau đây:

$$\begin{cases} u+v=m & (2)\\ u^2+v^2=4 & (3)\\ 1\le u\le\sqrt{3};1\le v\le\sqrt{3} & (4)\end{cases}$$ có nghiệm.

Xét hệ tọa độ Ouv



Vậy hệ (2) (3) (4) có nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng u + v = m cắt cung $\overset{\frown}{MP}$ (xem hình vẽ trên).

Dễ thấy đường thẳng nối M, P có phương trình $u+v=\sqrt{3}+1$.

Còn tiếp tuyến với đường tròn (3) và song song với MP có phương trình $u+v=2\sqrt{2}$

Từ đó suy ra đường thẳng u + v = m phải nằm giữa hai đường nói trên.

Như vậy $\sqrt{3}+1\le m\le 2\sqrt{2}$ là điều kiện cần và đủ để hệ (2) (3) (4) có nghiệm (tức là (1) có nghiệm).

Do đó $\max\limits_{x\in R} f(x)=2\sqrt{2};\ \min\limits_{x\in R} f(x)=1+\sqrt{3}$.

Bài 26. Chứng minh rằng ∀α, ∀β ta có:

$\alpha^2(1+\sin^2\beta)+2\alpha(\sin\beta+\cos\beta)+1+\cos^2\beta>0.$

Giải

Xét tam thức bậc hai P(α) với

$P(\alpha)=\alpha^2(1+\sin^2\beta)+2\alpha(\sin\beta+\cos\beta)+1+\cos^2\beta,$

Ta có: $a=1+\sin^2\beta>0$

$$\begin{aligned}\Delta' &= (\sin\beta+\cos\beta)^2-(1+\sin^2\beta)(1+\cos^2\beta)\\ &= 1+2\sin\beta\cos\beta-1-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\beta\\ &= -(1-2\sin\beta\cos\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta)\\ &= -(1-\sin\beta\cos\beta)^2\\ &= -(1-\frac{1}{2}\cos\beta)^2<0 \quad \text{do } 1-\frac{1}{2}\sin2\beta>0\ \forall\beta\end{aligned}$$

Theo định lí về dấu tam thức bậc hai, ta có P(α) > 0, ∀α ⇒ đpcm!

Bài 27. Cho $\alpha_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ là các góc tùy ý đo bằng rad, và m là số nguyên dương lẻ. Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i\left(n\sum_{i=1}^n\alpha_i+2\sum_{i=1}^n\cos\alpha_i\right)+2n-2\sum_{i=1}^n\sin^2\alpha_i.$$

Giải

$$\begin{aligned}\text{Đặt } S_n &= \sum_{i=1}^n\alpha_i\left(n\sum_{i=1}^n\alpha_i+2\sum_{i=1}^n\cos\alpha_i\right)+2n-2\sum_{i=1}^n\sin^2\alpha_i\\ &= \sum_{i=1}^n\alpha_i\left(n\sum_{i=1}^n\alpha_i+2\sum_{i=1}^n\cos\alpha_i\right)+2n-2\sum_{i=1}^n\left(1-\cos^2\alpha_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\alpha_i\left(n\sum_{i=1}^n\alpha_i+2\sum_{i=1}^n\cos\alpha_i\right)+2\sum_{i=1}^n\cos^2\alpha_i\\ &= \sum_{i=1}^n\cos^2\alpha_i+\sum_{i=1}^n\cos^2\alpha_i+\left(2\sum_{i=1}^n\cos\alpha_i\right)\sum_{i=1}^n\alpha_i+n\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^n\cos^2\alpha_i+\sum_{i=1}^n\left[\cos^2\alpha_i+2\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\right)\cos\alpha_i+\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\right)^2\right]\\ &= \sum_{i=1}^n\cos^2\alpha_i+\sum_{i=1}^n\left[\cos\alpha_i+\sum_{i=1}^n\alpha_i\right]^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $S_n\ge 0$ ∀n là số nguyên dương.

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi $\forall i=\overline{1,n}$ ta có:

$$\begin{cases}\cos\alpha_i=0\\ \cos\alpha_i+\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_i=\dfrac{\pi}{2}+k_i\pi\\ \sum\limits_{i=1}^n\alpha_i=0\end{cases} k_i\in Z$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_i=\dfrac{\pi}{2}+k_i\pi,\ k_i\in Z\\ \dfrac{\pi}{2}(2k_1+2k_2+\ldots+2k_n+n)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_i=\dfrac{\pi}{2}+k_i\pi,\ k_i\in Z & (2)\\ n+2(k_1+k_2+\ldots+k_n)=0. & (3)\end{cases}$$

Do n là số nguyên lẻ, nên (3) không thể xảy ra, do đó trong bất đẳng thức $S_n\ge 0$ không thể xảy ra dấu bằng, tức là $S_n>0\Rightarrow$ đpcm!

Bài 28. Cho a, b, c, d > 0. Tìm giá trị lớn và nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\dfrac{a\sin^4x+b\cos^4y}{c\sin^2x+d\cos^2y}+\dfrac{a\cos^4x+b\sin^4y}{c\cos^2x+d\sin^2y}$ trên miền xác định của biểu thức.

Giải

Đặt $P_1 = \dfrac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \dfrac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$,

$P_2 = \dfrac{\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \dfrac{\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$.

Khi đó ta có $P = aP_1 + bP_2$ (1)

Ta thấy $P_1 \le \dfrac{\sin^4 x}{c\sin^2 x} + \dfrac{\cos^4 x}{c\cos^2 x} = \dfrac{1}{c}$.

Tương tự $P_2 \le \dfrac{1}{d}$.

Vì $a > 0, b > 0 \Rightarrow P \le \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d}$. (2)

Mặt khác khi $x = y = \dfrac{\pi}{2}$, thì $P = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d}$, vậy $\max P = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d}$.

Để ý rằng $c + d = c(\sin^2x + \cos^2x) + d(\cos^2y + \sin^2y)$, nên theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$(c + d)P_1 =$

$$\left(c\sin^2 x + d\cos^2 y + c\cos^2 x + d\sin^2 y\right)\left(\frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}\right)$$

$\ge (\sin^2x + \cos^2x)^2 = 1$

$\Rightarrow P_1 \ge \dfrac{1}{c+d}$. (3)

Tương tự có $P_2 \ge \dfrac{1}{c+d}$. (4)

Do $a, b > 0$ nên từ (3) (4) suy ra $P \ge \dfrac{a+b}{c+d}$.

Mặt khác khi $x = y = \dfrac{\pi}{4}$ thì $P = \dfrac{a+b}{c+d} \Rightarrow \min P = \dfrac{a+b}{c+d}$.

Bài 29. Cho $\dfrac{\pi}{3} \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ và $\dfrac{\pi}{3} \le \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Chứng minh: $\dfrac{2}{\cos\alpha + \cos\beta} - 1 \le \sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\beta} - 1\right)}$

Giải

Do $0 < \cos\alpha \le \dfrac{1}{2}$, $0 < \cos\beta \le \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < \cos\alpha + \cos\beta \le \dfrac{1}{4}$ và $0 < \cos\alpha\cos\beta \le \dfrac{1}{4}$.

Đặt $A = \cos\alpha + \cos\beta$ và $B = \cos\alpha\cos\beta$ khi đó $0 < A \le 1$ và $0 < B \le \dfrac{1}{4}$

Lúc này bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$\dfrac{2-A}{A} \le \sqrt{\dfrac{1-A+B}{B}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2-A)^2}{A^2} \le \dfrac{1-A+B}{B}$ (do $\dfrac{2-A}{A} > 0$)

$\Leftrightarrow B(2-A)^2 \le A^2(1-A+B)$

$\Leftrightarrow 4B - 4AB + A^2B \le A^2 - A^3 + A^2B$

$\Leftrightarrow A^3 - A^2 - 4AB + 4B \le 0$

$\Leftrightarrow (A-1)(A^2 - 4B) \le 0.$ (1)

Vì $A \le 1$ còn $A^2 - 4B = (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - 4\cos\alpha\cos\beta$

$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 \ge 0$

Vậy (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ \cos\alpha = \cos\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha + \cos\beta = 1 \\ \cos\alpha = \cos\beta. \end{array}\right.$

Do $\cos\alpha \le \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta \le \dfrac{1}{2}$, nên dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \dfrac{\pi}{3}$.

Bài 30. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\frac{|\sin n|}{n} + \frac{|\sin(n+1)|}{n+1} + \ldots + \frac{|\sin(3n-1)|}{3n-1} > \frac{1}{9}.$$

Giải

Ta có nhận xét sau:

Nếu α, β là hai góc tùy ý mà $|\alpha - \beta| = 1$ (rad) thì ta có

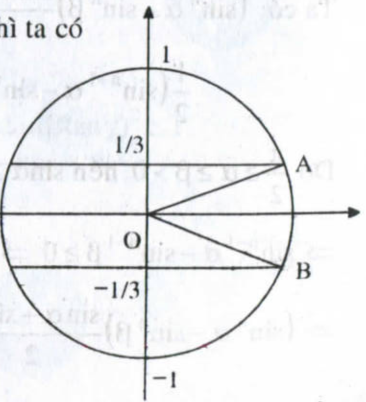
$\max\{|\sin\alpha|, |\sin\beta|\} > \dfrac{1}{3}$. (1)

Nhận xét chứng minh như sau:

Vẽ vòng tròn đơn vị.

Hai đường thẳng $y = \pm\dfrac{1}{3}$ cắt đường tròn tại A, B (giao điểm bên phải trục tung).

Đặt $\widehat{AOB} = 2\alpha$, khi đó ta có:



$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$; $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Từ đó: $\sin 2\alpha = \dfrac{4\sqrt{2}}{9} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\alpha < \dfrac{\pi}{4} < 1$

$\Rightarrow \widehat{AOB} < 1$ (rad)

Vì $|\alpha - \beta| = 1$ (rad) $\Rightarrow$ có ít nhất 1 góc trong số hai góc α, β có cạnh nằm ngoài $\widehat{AOB}$.

Điều đó có nghĩa là $\max\{|\sin\alpha|, |\sin\beta|\} > \dfrac{1}{3}$.

Nhận xét được chứng minh.

Đặt vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là S, khi đó ta có:

$$S > \frac{1}{n+1}\left(|\sin n| + |\sin(n+1)|\right) + \frac{1}{n+3}\left(|\sin(n+2)| + |\sin(n+3)|\right) + \ldots + \frac{1}{3n-1}\left(|\sin(3n-2)| + |\sin(3n-1)|\right). \quad (2)$$

Theo nhận xét trên với mọi k = n, n + 2, ..., 3n – 2 ta có:

$$|\sin k| + |\sin(k+1)| > \frac{1}{3}. \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra $S > \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{3n-2}\right) > \dfrac{1}{3}\,\dfrac{n}{3n-1} > \dfrac{1}{9}$.

Đó là đpcm!

Bài 31. Cho $0 < \beta \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có bất đẳng thức sau: $\sin^n\alpha - \sin^n\beta \ge \dfrac{\sin^{n+1}\alpha - \sin^{n+1}\beta}{2}$.

Giải

Theo giả thiết, ta có: $0 < \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} \le 1$. (1)

Ta có: $\left(\sin^n\alpha - \sin^n\beta\right)\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} =$

$$\frac{1}{2}\left(\sin^{n+1}\alpha - \sin^{n+1}\beta\right) + \frac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta\left(\sin^{n-1}\alpha - \sin^{n-1}\beta\right). \quad (2)$$

Do $\dfrac{\pi}{2} \ge \alpha \ge \beta > 0$ nên $\sin\alpha \ge \sin\beta > 0$

$\Rightarrow \sin^{n-1}\alpha - \sin^{n-1}\beta \ge 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta\left(\sin^{n-1}\alpha - \sin^{n-1}\beta\right) \ge 0$

$\Rightarrow \left(\sin^n\alpha - \sin^n\beta\right)\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} \ge \dfrac{1}{2}\left(\sin^{n+1}\alpha - \sin^{n+1}\beta\right)$ (3)

Từ (1) (3) đi đến $\sin^n\alpha - \sin^n\beta \ge \dfrac{\sin^{n+1}\alpha - \sin^{n+1}\beta}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ α = β.

Bài 32. Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)} > 8$.

Giải

Do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\alpha > \sin\alpha$, vậy

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)} > 8 \quad (1)$$

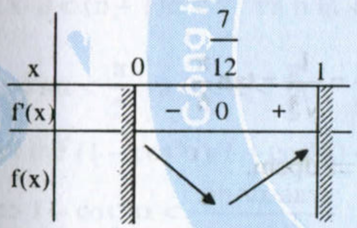
$\Leftrightarrow \cos\alpha > 8\sin^2\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2\alpha} > 8\tan^2\alpha(1 - \tan\alpha)$ (do $\cos^3\alpha > 0$)

$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha > 8\tan^2\alpha - 8\tan^3\alpha$

$\Leftrightarrow 8\tan^3\alpha - 7\tan^2\alpha + 1 > 0$ (2)

Xét hàm số $f(x) = 8x^3 - 7x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 24x^2 - 14x$



Do $f\left(\dfrac{7}{12}\right) > 0 \Rightarrow f(x) > 0\ \forall\ 0 < x < 1$.

Vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan\alpha < 1$.

$\Rightarrow f(\tan\alpha) > 0$ tức là (2) đúng ⇒ đpcm!

§ 2. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài 1. Cho $\begin{cases} \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 \\ \alpha, \beta, \lambda \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z. \end{cases}$

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{(\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha)^2}{3} + 2(\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma)^2 \le 1.$$

Giải

Do $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1 + \tan^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \tan^2\beta} + \dfrac{1}{1 + \tan^2\gamma} = 2$

$\Rightarrow \tan^2\alpha\tan^2\beta + \tan^2\beta\tan^2\gamma + \tan^2\gamma\tan^2\alpha + 2\tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma = 1.$ (1)

Đặt $a = \tan\alpha\tan\beta$; $b = \tan\beta\tan\gamma$; $c = \tan\gamma\tan\alpha$, thì từ (1) có:

$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

$\Rightarrow 2abc = 1 - (a^2 + b^2 + c^2).$ (2)

Lúc này bất đẳng thức đã cho có dạng $\dfrac{(a+b+c)^2}{3} + 1 - (a^2+b^2+c^2) \le 1$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2).$ (3)

Vì (3) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 2. Cho $\alpha, \beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\tan\beta = 3\tan\alpha$. Chứng minh rằng $\beta \le \alpha + \dfrac{\pi}{6}$.

Giải

Do $\alpha, \beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\tan\beta = 3\tan\alpha \Rightarrow \tan\beta > \tan\alpha \Rightarrow \beta > \alpha \Rightarrow 0 < \beta - \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Ta có: $\tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + 3\tan^2\alpha}$ (1)

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$1 + 3\tan^2\alpha \ge 2\sqrt{3}\tan\alpha$ (2)

Thay (2) vào (1) và có: $\tan(\beta - \alpha) \le \dfrac{2\tan\alpha}{2\sqrt{3}\tan\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6}$.

Vì $0 < \beta - \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \beta - \alpha \le \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \beta \le \alpha + \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 3\tan^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$) $\Rightarrow \tan\beta = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{6} \\ \beta = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Bài 3. Cho $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma \le \pi$. Chứng minh rằng:

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma) \le \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha).$

Giải

Xét hiệu sau:

$$S = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) - [\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$= [\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)] + [\sin(\beta+\gamma) - \sin\beta] + [\sin(\gamma+\alpha) - \sin\alpha] - \sin\gamma$$

$$= -2\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} + 2\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} + 2\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\gamma$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right) + \cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\beta+\frac{\gamma}{2}\right) - \cos\frac{\gamma}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}. \quad (1)$$

Do $\alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma \le \pi \Rightarrow \sin\dfrac{\alpha}{2} > 0, \sin\dfrac{\beta}{2} > 0, \sin\dfrac{\gamma}{2} > 0$

Và $\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \ge 0$, vậy từ (1) suy ra $S \ge 0 \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$ và $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$.

Bài 4. Cho n là số tự nhiên và $0 < (n+1)\alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Chứng minh: $(1 - \cos^n\alpha)(1 + \cos^n\alpha) < \tan(n\alpha)\tan\alpha.$

Giải

Do $0 < (n+1)\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ và n là số tự nhiên, nên hiển nhiên ta có:

$0 < n\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Vì thế $(1 - \cos^n\alpha)(1 + \cos^n\alpha) < \tan(n\alpha)\tan\alpha$ (1)

$\Leftrightarrow 1 - \cos^{2n}\alpha < \dfrac{\sin n\alpha\sin\alpha}{\cos n\alpha\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos n\alpha\cos\alpha - \cos^{2n+1}\alpha\cos n\alpha < \sin n\alpha\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos(n+1)\alpha < \cos^{2n+1}\alpha\cos n\alpha.$ (2)

Ta sẽ chứng minh (2) bằng nguyên lý quy nạp.

* Với n = 1, thì (2) có dạng:

$\cos2\alpha < \cos^3\alpha\cos\alpha$ (3)

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 < \cos^4\alpha$

$\Leftrightarrow (\cos^2\alpha - 1)^2 > 0.$ (4)

Vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ (4) đúng $\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng khi n = 1.

* Giả sử (2) đúng khi n = k, tức là ta có:

$\cos(k+1)\alpha < \cos^{2k+1}\alpha\cos k\alpha.$ (5)

* Xét khi n = k + 1

Giả sử $0 < (k+1)\alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Do giả thiết quy nạp và do $\cos\alpha > 0$, nên từ (5) suy ra

$\cos(k+1)\alpha\cos\alpha < \cos^{2k+2}\alpha\cos k\alpha$

$\Rightarrow \cos(k+1)\alpha\cos\alpha - \sin(k+1)\alpha\sin\alpha < \cos^{2k+2}\alpha\cos k\alpha - \sin(k+1)\alpha\sin\alpha$

$\Rightarrow \cos(k+2)\alpha < \cos^{2k+2}\alpha[\cos(k+1)\alpha\cos\alpha + \sin(k+1)\alpha\sin\alpha] - \sin(k+1)\alpha\sin\alpha$

$\Rightarrow \cos(k+2)\alpha < \cos^{2k+3}\alpha\cos(k+1)\alpha + \sin(k+1)\alpha.\sin\alpha(\cos^{2k+2}\alpha - 1) \quad (6)$

Vì $\sin(k+1)\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$, $\cos^{2k+2}\alpha - 1 < 0$, nên từ (6) có:

$\cos(k+2)\alpha < \cos^{2k+3}\alpha\cos(k+1)\alpha$.

Vậy (2) cũng đúng khi $n = k+1$.

Theo nguyên lý quy nạp suy ra đpcm.

Cách 2:

Đưa bất đẳng thức đã cho về dạng tương đương sau:

$\tan(n\alpha)\tan\alpha + \cos^{2n}\alpha > 1. \quad (7)$

Đặt $f(n) = \tan(n\alpha)\tan\alpha + \cos^{2n}\alpha$

Trước hết ta chứng minh rằng $\forall k = 0, 1, ..., n-1$ ta có:

$f(k+1) > f(k) \quad (8)$

Thật vậy

$(8) \Leftrightarrow \tan(k+1)\alpha\tan\alpha + \cos^{2k+2}\alpha > \tan(k\alpha)\tan\alpha + \cos^{2k}\alpha$

$\Leftrightarrow \tan\alpha[\tan(k+1)\alpha - \tan(k\alpha)] > \cos^{2k}\alpha(1 - \cos^2\alpha)$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos(k+1)\alpha\cos(k\alpha)} > \cos^{2k}\alpha\sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha\frac{1}{\cos(k+1)\alpha\cos(k\alpha)\sin\alpha} > \cos^{2k}\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\alpha\cos(k+1)\alpha\cos(k\alpha)} > \cos^{2k}\alpha. \quad (9)$$

Do $0 < (n+1)\alpha < \frac{\pi}{2}$, nên $\forall k = 0, 1, ... n-1$

$\Rightarrow \cos\alpha$, $\cos(k+1)\alpha$, $\cos k\alpha$ đều dương và bé hơn 1 $\Rightarrow$ (9) đúng $\Rightarrow$ (8) đúng.

Từ (8) có: $f(n) > f(n-1) > ... > f(1) > f(0)$.

Vì $f(0) = 1 \Rightarrow f(n) > 1 \Rightarrow \tan(n\alpha)\tan\alpha + \cos^{2n}\alpha > 1 \Rightarrow$ đpcm!

Bài 5. Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 1 \\ \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\delta \ge \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

Giải

Ta có: $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\delta \ge \frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow 4 - 2\left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta\right) \ge \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta \le \frac{1}{3}.$$

Vì thế đặt $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, $z = \sin\gamma$, $t = \sin\delta$, ta có:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le \frac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

Do vai trò bình đẳng, có thể giả sử $x \ge y \ge z \ge t$.

Rõ ràng $t \ge 0$. Thật vậy nếu $t < 0$ thì từ (1) có: $x + y + z > 1$

Lại có $x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2 > \frac{1}{3}$.

Điều này mâu thuẫn với (2). Vậy $t \ge 0 \Rightarrow x, y, z, t$ đều ≥ 0

Đặt $x_1 = \frac{1}{2} - x; y_1 = \frac{1}{2} - y; z_1 = \frac{1}{2} - z; t_1 = \frac{1}{2} - t$

Khi đó từ (1) có: $x_1 + y_1 + z_1 + t_1 = 1. \quad (3)$

$$\text{Lại có } x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - z\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2$$

$$= 1 - (x + y + z + t) + x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

Vậy từ (2) có $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 \le \frac{1}{3} \quad (4)$

Từ (3) (4) ta thu lại được hệ như (1) (2).

Vậy ta có $x_1 \ge 0$, $y_1 \ge 0$, $z_1 \ge 0$, $t_1 \ge 0$.

Như thế ta có: $0 \le \sin\alpha \le \frac{1}{2}$, $0 \le \sin\beta \le \frac{1}{2}$, $0 \le \sin\gamma \le \frac{1}{2}$, $0 \le \sin\delta \le \frac{1}{2}$, tức là $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow$ đpcm.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1 + \tan x \tan y} + \sqrt{1 + \tan y \tan z} + \sqrt{1 + \tan z \tan x}$$

nếu như $x, y, z \ge 0$ và $x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki với

$a_1 = \sqrt{1+\tan x\tan y}; a_2 = \sqrt{1+\tan y\tan z}; a_3 = \sqrt{1+\tan z\tan x}$

$b_1 = b_2 = b_3 = 1$, ta có:

$(3 + \tan x\tan y + \tan y\tan z + \tan z\tan x).3$

$\geq \left(\sqrt{1+\tan x\tan y} + \sqrt{1+\tan y\tan z} + \sqrt{1+\tan z\tan x}\right)^2$. (1)

Do $x + y + z = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x\tan y + \tan y\tan z + \tan z\tan x = 1$, nên từ (1) có

$P^2 \leq 12$

$\Rightarrow P \leq 2\sqrt{3}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow 1 + \tan x\tan y = 1 + \tan y\tan z = 1 + \tan z\tan x$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy $\max P = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{\pi}{6}$.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$P = \cos 2x + \cos 2y$.

Giải

Gọi m là giá trị tùy ý của P. Khi đó hệ phương trình sau (ẩn x và ẩn y)

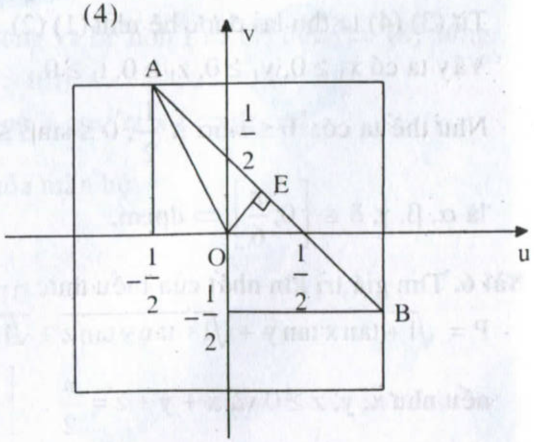
$$\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = m & (1) \\ \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{2-m}{2} & (3) \\ \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} & (4) \end{cases}$

Từ đó suy ra hệ (3) (4) có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau (ẩn u, v)

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \dfrac{2-m}{2} & (5) \\ u + v = \dfrac{1}{2} & (6) \\ |u| \leq 1; |v| \leq 1 & (7) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Xét hệ trục tọa độ uOv.



Các điểm (u; v) thỏa mãn (6) (7) là đoạn thẳng AB với $A\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$; $B\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$

Vậy hệ (5) (6) (7) có nghiệm khi và chỉ khi đường tròn tâm O, bán kính $r = \sqrt{\dfrac{2-m}{2}}$ cắt đoạn AB. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$OE \leq r \leq OA$

$\Leftrightarrow OE^2 \leq r^2 \leq OA^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \leq \dfrac{2-m}{2} \leq \dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq m \leq \dfrac{7}{4}$ (8) (ở đây E là hình chiếu của O trên AB)

Vì m là giá trị tùy ý của P nên từ (8) suy ra $\max P = \dfrac{7}{4}$; $\min P = -\dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Cho $f(x) = a_1\sin b_1x + a_2\sin b_2x + ... + a_n\sin b_nx$.

Giả sử $|f(x)| \leq |\sin x|, \forall |x| \leq 1$. Chứng minh rằng $|a_1b_1 + ... + a_nb_n| \leq 1$.

Giải

Ta có: $f'(x) = a_1b_1\cos b_1x + a_2b_2\cos b_2x + ... + a_nb_n\cos b_nx$.

Từ đó $|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| = |f'(0)| = \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right|$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|\sin x|}.\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{|x|}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|\sin x|}. \quad (1)$$

Do $|f(x)| \leq |\sin x|, \forall x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{|\sin x|} \leq 1$

$\Rightarrow |a_1b_1 + ... + a_nb_n| \leq 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 9. Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ là n số thực thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i\alpha_{i+1} = 1$.

Chứng minh rằng $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \geq \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n+1}}$.

Giải

Đặt $a_k = \dfrac{\sin\dfrac{(k+1)\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}}$, $k = 1, 2, ... n-1$

Ta có: $a_1 = \dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{\pi}{n+1}} = 2\cos\dfrac{\pi}{n+1}$,

$$\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{n\pi}{n+1}}. \qquad (1)$$

Do $2\sin\dfrac{n\pi}{n+1}\cos\dfrac{\pi}{n+1} = \sin\pi + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n+1} = \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n+1}$ (2)

Thay (2) vào (1) có: $\dfrac{1}{a_{n-1}} = 2\cos\dfrac{\pi}{n+1}$.

Với k = 1, 2, ... n – 2 ta có:

$$\frac{1}{a_k} + a_{k+1} = \frac{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{(k+1)\pi}{n+1}} + \frac{\sin\dfrac{(k+2)\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{(k+1)\pi}{n+1}} = \frac{2\sin\dfrac{(k+1)\pi}{n+1}\cos\dfrac{\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{(k+1)\pi}{n+1}} = 2\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Từ đó ta có:

$$a_1 = \frac{1}{a_1} + a_2 = \frac{1}{a_2} + a_3 = \ldots = \frac{1}{a_{n-2}} + a_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}} = 2\cos\frac{\pi}{n+1} \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$a_1\alpha_1^2 + \frac{1}{a_1}\alpha_2^2 \geq 2\alpha_1\alpha_2$$

$$a_2\alpha_2^2 + \frac{1}{a_2}\alpha_3^2 \geq 2\alpha_2\alpha_3$$

...

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}}\alpha_n^2 \geq 2\alpha_{n-1}\alpha_n.$$

Cộng từng vế n – 1 bất đẳng thức trên ta có:

$$a_1\alpha_1^2\left(\frac{1}{a_1} + a_2\right)\alpha_2^2 + \left(\frac{1}{a_2} + a_3\right)\alpha_3^2 + \ldots + \left(\frac{1}{a_{n-2}} + a_{n-1}\right)\alpha_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}}\alpha_n^2$$

$$\geq 2\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\alpha_{i+1} = 2. \qquad (4)$$

Từ (3) (4) đi đến $2\cos\dfrac{\pi}{n+1}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2\right) \geq 2$ hay $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \geq \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n+1}}$.

Đó là đpcm!

Bài 10. Cho a, b, c > 0. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b}, \text{ nếu như } a\sin x + b\cos y = c \text{ và } c \leq \min\left\{\frac{a^3+b^3}{a^2}; \frac{a^3+b^3}{b^2}\right\}.$$

Giải

Ta có: $P = \dfrac{1-\sin^2 x}{a} + \dfrac{1-\cos^2 y}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \left(\dfrac{\sin^2 x}{a} + \dfrac{\cos^2 y}{b}\right)$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki với

$a_1 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{a}}$; $a_2 = \dfrac{\cos y}{\sqrt{b}}$,

$b_1 = a\sqrt{a}$; $b_2 = b\sqrt{b}$.

Ta có: $\left(\dfrac{\sin^2 x}{a} + \dfrac{\cos^2 y}{b}\right)(a^3 + b^3) \geq (a\sin x + b\cos y)^2 = c^2$.

Do $a^3 > 0$, $b^3 > 0$ nên ta có: $\dfrac{\sin^2 x}{a} + \dfrac{\cos^2 y}{b} \geq \dfrac{c^2}{a^3+b^3}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $P \leq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{c^2}{a^3+b^3}$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{a^2} = \dfrac{\cos y}{b^2}$.

Xét hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a\sin x + b\cos y = c \\ \dfrac{\sin x}{a^2} = \dfrac{\cos y}{b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{a^2 c}{a^3+b^3} & (4) \\ \cos y = \dfrac{b^2 c}{a^3+b^3} & (5) \end{cases}$$

Do a > 0, b > 0, c > 0 nên ta có $\dfrac{a^2 c}{a^3+b^3} > 0$, $\dfrac{b^2 c}{a^3+b^3} > 0$

Mặt khác vì $c \leq\leq \min\left\{\dfrac{a^3+b^3}{a^2}; \dfrac{a^3+b^3}{b^2}\right\} \Rightarrow \dfrac{a^2 c}{a^3+b^3} \leq 1$ và $\dfrac{b^2 c}{a^3+b^3} \leq 1$

Vậy hệ (4) (5) có nghiệm $\Rightarrow \max P = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{c^2}{a^3+b^3}$.

Bài 11. Giả sử $a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx > 0\ \forall x$.

Chứng minh: $a_0 > 0$.

Giải

Đặt $P(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx$

$$\Rightarrow F(x) = a_0x + \frac{a_1}{1}\sin x + \frac{a_2}{2}\sin 2x + ... + \frac{a_n}{n}\sin nx.$$

Từ đó ta có: $F'(x) = P(x)$

Vì $P(x) > 0\ \forall x \Rightarrow F'(x) > 0\ \forall x \Rightarrow F(x)$ là hàm đồng biến trên R.

Nói riêng ta có: $F(\pi) > F(0)$ (1)

Vì $F(\pi) = a_0\pi$; $F(0) = 0$, nên từ (1) có $a_0\pi > 0 \Rightarrow a_0 > 0 \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét:

Có thể trình bày cách khác như sau:

Đặt $P(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + ... + a_n\cos nx$.

Khi đó $P(x) > 0\ \forall x$, nói riêng $P(x) > 0\ \forall x \in [0; \pi]$.

Rõ ràng P(x) là hàm liên tục trên $[0; \pi]$ nên nó khả tích.

Theo tính chất cơ bản của tích phân, ta có:

$$\int_0^\pi P(x)dx > 0. \qquad (2)$$

Dễ thấy $\int_0^\pi P(x)dx = a_0\int_0^\pi dx + a_1\int_0^\pi \cos x dx + ... + a_n\int_0^\pi \cos nx dx$

$$= a_0\pi + a_1\sin x\Big|_0^\pi + ... + \frac{a_n}{n}\sin nx\Big|_0^\pi$$

$$= a_0\pi \qquad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra $a_0\pi > 0 \Rightarrow a_0 > 0 \Rightarrow$ đpcm.

Chương 3.

ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

§ 1. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KHÔNG ĐIỀU KIỆN

Trong suốt chương này ta sử dụng các kí hiệu nhất quán sau đây đối với một tam giác ABC.

- A, B, C để chỉ 3 góc của tam giác
- a, b, c chỉ độ dài ba cạnh của tam giác đối diện với các đỉnh A, B, C
- h_a, h_b, h_c chỉ độ dài ba đường cao của tam giác tương ứng kẻ từ A, B, C
- l_a, l_b, l_c chỉ độ dài ba đường phân giác trong của các góc A, B, C
- m_a, m_b, m_c chỉ độ dài ba đường trung tuyến của tam giác lần lượt xuất phát từ A, B, C
- r, R tương ứng là đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác
- r_a, r_b, r_c tương ứng là các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C
- S, p tương ứng là diện tích và nửa chu vi của tam giác.

Bài 1. (Một số hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác)

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
2. $\sin 2A + \sin B + \sin C = 4\sin A\sin B\sin C$
3. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
4. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$
5. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$ (trừ tam giác vuông)
6. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$
7. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$
8. $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$.

Giải

1. Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \Rightarrow \text{đpcm}$$

2.3.4 Chứng minh tương tự như 1/

5. Ta có: $\tan(A+B) = -\tan C$ (do $A + B + C = \pi$)

$$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = -\tan C$$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C \Rightarrow$ đpcm.

6.7.8. Chứng minh tương tự như 5/

Bài 2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $a = 2R\sin A$ (định lí hàm số sin)
2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (định lí hàm số cosin)
3. $\cot A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$.

Giải

1.2. (xem sách GK đại số 10)

3. Theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\sin A\cot A \quad (1)$$

Do $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, nên từ (1) có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S.\cot A \Rightarrow \cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}.$$

Bài 3. Chứng minh trong mọi tam giác ABC, ta có:

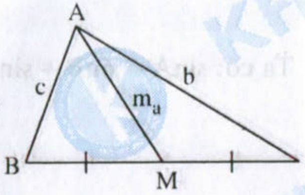
1. $m_a^2 = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ 2. $l_A = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

3. $h_a = 2R\sin B\sin C$

4. $r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ 5. $r_a = p\tan\dfrac{A}{2}$.

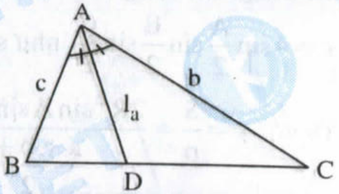
Giải

1. Theo hệ thức lượng giác trong tam giác thường, ta có: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$



$$\Rightarrow \quad c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

2. Vẽ phân giác AD của góc A



Ta có: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}$$

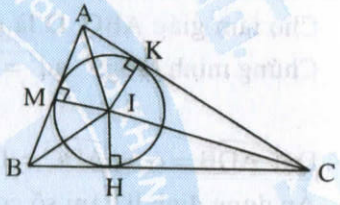
$$\Rightarrow bc2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = l_a\sin\frac{A}{2}(b+c).$$

$$\text{Do } \sin\frac{A}{2} \neq 0 \Rightarrow l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

3. Ta có: $S = \dfrac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a}$ (1)

Vì $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$; $a = 2R\sin A$, nên từ (1) suy ra $h_a = 2R\sin B\sin C$ $\Rightarrow$ đpcm.

4. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp.



Khi đó ta có I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Kẻ IH ⊥ BC, ta có IH = r.

Dễ thấy: BC = BH + HC

$$\Rightarrow 2R\sin A = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = r\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \Rightarrow 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = r\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\text{Vì } \cos\frac{A}{2} \neq 0 \Rightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Gọi K, M lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác với AC, AB. Ta có theo tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm

AM = AK = p − a

BM = BH = p − b

CH = CK = p − c

Từ đó suy ra $r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = (p-b)\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2}$.

5. Chứng minh tương tự như 4.

Chú ý:

1. Người ta hay dùng chùm công thức sau về diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}ah_a = 2R^2\sin A\sin B\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = (p-a)r_a$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2. Sử dụng các công thức trên có thể chứng minh lại công thức:

$r = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ như sau:

Ta có: $r = \frac{S}{p} = \frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{\frac{a+b+c}{2}}$

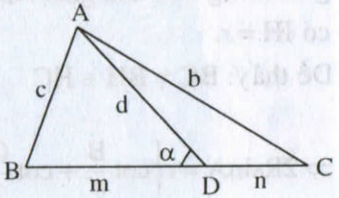
$$= \frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{R(\sin A+\sin B+\sin C)} = \frac{2R^2 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{R.4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Bài 4. (Định lí Stewart)

Cho tam giác ABC, D là điểm trên cạnh BC. Đặt AD = d, BD = m, DC = n. Chứng minh rằng: $ad^2 = mb^2 + nc^2 - mna$.

Giải



Đặt $\widehat{ADB} = \alpha \Rightarrow \widehat{ADC} = 180^0 - \alpha$.

Áp dụng định lí hàm số cosin trong hai tam giác ABD và ADC, ta có:

$c^2 = d^2 + m^2 - 2dm\cos\alpha$ (1)

$b^2 = d^2 + n^2 - 2dn\cos(180^0 - \alpha)$

$b^2 = d^2 + n^2 + 2dn\cos\alpha$ (2)

Từ (1) (2) suy ra

$mb^2 + nc^2 = md^2 + mn^2 + 2dmn\cos\alpha + nd^2 + nm^2 - 2dmn\cos\alpha$

$= d^2(m+n) + mn(m+n)$

$= ad^2 + mna$

$\Rightarrow ad^2 = mb^2 + nc^2 - mna \Rightarrow$ đpcm.

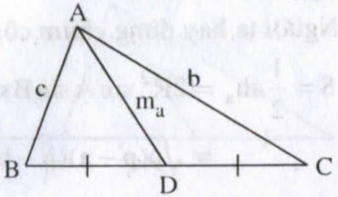
Nhận xét:

1. Trong định lí Stewart lấy AD là đường trung tuyến kẻ từ A

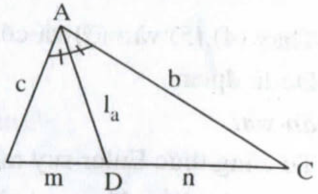
Khi đó ta có: $m = n = \frac{a}{2}$; $d = m_a$. Từ đó suy ra: $am_a^2 = \frac{ab^2}{2} + \frac{ac^2}{2} - \frac{a^3}{4}$

$\Rightarrow m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$

Ta thu lại công thức tính đường trung tuyến trong bài 3.



2. Trong định lí Stewart, lấy AD là đường phân giác trong của góc A. Khi đó ta có $AD = l_a$.



Theo định lí đường phân giác trong thì

$\frac{m}{n} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{m}{n+m} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow m = \frac{ac}{b+c}$.

Tương tự $n = \frac{ab}{b+c}$.

Theo định lí Stewart, ta có: $al_a^2 = \frac{ac}{b+c}b^2 + \frac{ab}{b+c}c^2 - a\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

$$\Rightarrow l_a^2 = \frac{b^2c+bc^2}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc.2p.2(p-a)}{(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow l_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{b+c}.$$

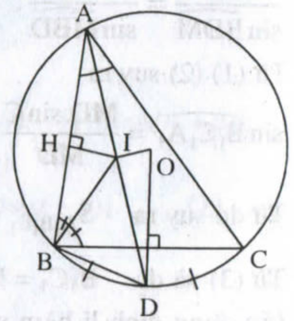
Ta có thêm một công thức tính đường phân giác trong.

Bài 5. (Công thức Euler)

Cho tam giác ABC. Gọi O và I tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Đặt l = IO. Chứng minh rằng $l^2 = R^2 - 2Rr$.

Giải

Đường phân giác trong của góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Ta có:



$\widehat{BID} = \widehat{BAI} + \widehat{ABI} = \frac{A+B}{2}$,

$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{DBI} = \frac{B+A}{2}$

Từ đó: $\widehat{BID} = \widehat{IBD} \Rightarrow DB = DI$ (1)

Theo công thức tính phương tích, ta có:

$IA.ID = \mathcal{P}_I(O) = R^2 - IO^2$. (2)

Từ (1) (2) có: $IA.DB = R^2 - IO^2$ (3)

Kẻ $IH \perp AB \Rightarrow IA = \frac{IH}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ (4)

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác DBA (với chú ý R cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DBA), ta có:

$DB = 2R\sin\widehat{BAD} = 2R\sin\dfrac{A}{2}$ (5)

Thay (4) (5) vào (3) và có: $2Rr = R^2 - IO^2 \Rightarrow IO^2 = R^2 - 2Rr$

Đó là đpcm.

Nhận xét:

Từ công thức Euler suy ra trong mọi tam giác ta có: $R \geq 2r$

Thật vậy điều đó suy ra từ $R^2 - 2Rr \geq 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow l = 0 \Leftrightarrow I \equiv 0 \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 6. (Định lí Euler)

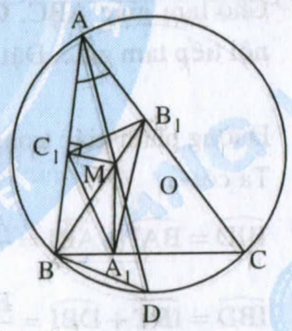
Cho tam giác ABC, M là một điểm tùy ý bên trong tam giác. Giả sử A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M tương ứng trên BC, AC, AB. Đặt MO = d, ở đây O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)S,$$

trong đó R, S tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích tam giác ABC.

Giải

Giả sử AM kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D.



Ta có: $\widehat{B_1C_1A_1} = \widehat{B_1C_1M} + \widehat{MC_1A_1}$

$= \widehat{B_1AM} + \widehat{MBA_1} = \widehat{DBC} + \widehat{MBC}$

$= \widehat{MBD}$ (1)

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔMBD, ta có:

$$\frac{MB}{\sin\widehat{BDM}} = \frac{MD}{\sin\widehat{MBD}}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra

$$\sin\widehat{B_1C_1A_1} = \frac{MD.\sin C}{MD}. \quad (3) \quad (\text{vì } \widehat{BDM} = c)$$

Từ đó suy ra $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}C_1A_1.C_1B_1\sin\widehat{A_1C_1B_1}$ (4)

Từ (3) và do $B_1C_1 = MA\sin A$; $C_1A_1 = Mb\sin B$

(áp dụng định lí hàm số sin trong các tam giác AB_1C_1 và BA_1C_1 với chú ý MA, MB tương ứng là đường kính các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác trên), nên thay vào (4) ta có:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}MA.MB\sin A\sin B\frac{MD\sin C}{MB}$$

$$= \frac{1}{2}MA.MD\sin A\sin B\sin C \quad (5)$$

Theo công thức tính phương tích, thì

$MA.MD = P_M(O) = R^2 - MO^2 = R^2 - d^2$ (6)

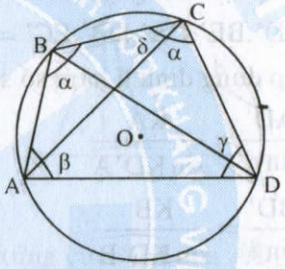
Từ (5) (6) đi đến $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}(R^2 - d^2)\sin A\sin B\sin C$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)R^2\sin A\sin B\sin C \quad (7)$$

Do $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$, nên từ (7) suy ra $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{d^2}{R^2}\right)S \Rightarrow$ đpcm.

Bài 7. (Định lí Ptoleme)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O. Chứng minh rằng AC.BD = AB.CD + AD.BC.



Giải

Đặt $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \alpha$

$\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = \beta$

$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \gamma$

$\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \delta$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó R cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD, ABD.

Áp dụng định lí hàm số sin trong các tam giác này ta có:

$AB = 2R\sin\delta$; $BC = 2R\sin\gamma$; $CD = 2R\sin\beta$

$AD = 2R\sin\alpha$; $BD = 2R\sin(\alpha + \delta)$; $AC = 2R\sin(\alpha + \beta)$.

Ta có:

$AB.CD + AD.BC = 4R^2\sin\beta\sin\delta + 4R^2\sin\alpha\sin\gamma$

$= 2R[\cos(\beta - \delta) - \cos(\beta + \delta) + \cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)]$.

Vì $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^0 \Rightarrow \cos(\beta + \delta) = -\cos(\alpha + \gamma)$.

Từ đó suy ra: $AB.CD + AD.BC = 2R^2[\cos(\beta - \delta) + \cos(\alpha - \gamma)]$. (1)

Mặt khác ta có:

$AC.BD = 4R^2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \delta)$

$= 2R^2[\cos(\beta - \delta) - \cos(\alpha + \beta + \delta + \alpha)]$

$= 2R^2[\cos(\beta - \delta) - \cos(180^0 - \gamma + \alpha)]$

$= 2R^2[\cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \gamma)]$. (2)

Từ (1) (2) ta thu được: AC.BD = AB.CD + AD.BC

⇒ đpcm.

Bài 8. (Định lí Pôngsơlê)

Chứng minh rằng các đường thẳng nối các đỉnh của một đa giác lồi có số lẻ cạnh với một điểm bất kì ở bên trong đa giác xác định trên các cạnh đối diện những đoạn thẳng mà tích những đoạn không có đầu mút chung bằng tích những đoạn còn lại (đa giác $A_1A_2...A_{2k+1}$ có 2k + 1 đỉnh, thì cạnh đối diện với đỉnh A_1 là cạnh $A_{k+1}A_{k+2}$,...).

Giải

Ta chứng minh định lí Pôngsơlê cho trường hợp ngũ giác lồi (với đa giác có số lẻ cạnh $n \geq 7$ chứng minh hoàn toàn tương tự).

Xét ngũ giác lồi ABCDE và K là một điểm bất kì trong ngũ giác. AK, BK, CK, DK, EK lần lượt cắt các cạnh đối diện tại A', B', C', D', E'.

Kí hiệu α, β, γ, δ, φ như hình vẽ bên.

Ta phải chứng minh:

$$AD'.BE'.CA'.DB'.EC' = D'B.E'C.A'D.B'E.C'A. \quad (1)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong các tam giác KAD' và KBD' ta có:

$$\frac{AD'}{\sin\alpha} = \frac{KA}{\sin\widehat{KD'A}} \quad (2)$$

$$\frac{BD'}{\sin\beta} = \frac{KB}{\sin\widehat{KD'B}} \quad (3)$$

Do $\widehat{KD'A} + \widehat{KD'B} = 180^0$ nên $\sin\widehat{KD'A} = \sin\widehat{KD'B}$

Vì thế từ (2) (3) ta có: $\dfrac{AD'}{BD'} = \dfrac{KA}{KB}\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (4)

Lập luận tương tự, thì $\dfrac{BE'}{CE'} = \dfrac{KB}{KC}\dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta}$ (5)

$$\frac{CA'}{DA'} = \frac{KC}{KD}\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} \quad (6)$$

$$\frac{DB'}{B'E} = \frac{KD}{KE}\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad (7)$$

$$\frac{EC'}{C'A} = \frac{KE}{KA}\frac{\sin\beta}{\sin\varphi}. \quad (8)$$

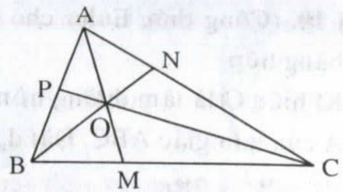
Nhân từng vế (4) (5) (6) (7) (8) suy ra (1) ⇒ đpcm.

Chú ý: Xét trường hợp đặc biệt khi n = 3, từ định lí Pôngsơlê ta có kết quả sau:

Nếu O là điểm tùy ý trong tam giác ABC. Giả sử AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện tại M, N, P. Khi đó ta có:

$$BM.CN.AP = MC.NA.PB$$

hay $\dfrac{BM}{MC}\dfrac{CN}{NA}\dfrac{AP}{PB} = 1$ (9)



Dưới dạng (9) ta thu lại được định lí Seva quen biết.

Bài 9. (Bài toán về đường đối trung)

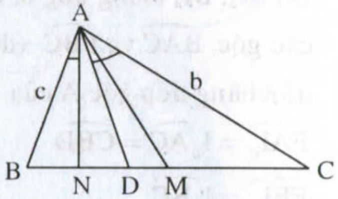
Cho tam giác ABC. Gọi AM, AD lần lượt là các đường trung tuyến và phân giác trong của góc A. Đường thẳng đối xứng với AM qua phân giác AD cắt BC tại N. Chứng minh rằng $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Giải

Vì hai tam giác ABN và CAN có chung đường cao kẻ từ A, nên ta có:

$$\frac{BN}{CN} = \frac{S_{ABN}}{S_{ACN}} \quad (1)$$

Lại thấy:



$$\frac{S_{ABN}}{S_{ACN}} = \frac{\frac{1}{2}AB.AN.\sin\widehat{BAN}}{\frac{1}{2}AC.AN.\sin\widehat{NAC}} = \frac{c}{b}\frac{\sin\widehat{BAN}}{\sin\widehat{NAC}} \quad (2)$$

Do AD là phân giác của góc A và AN là đối xứng của AM qua AD, nên ta có: $\begin{cases}\widehat{BAN} = \widehat{MAC} \\ \widehat{NAC} = \widehat{MAB}\end{cases}$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra: $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{c}{b}\dfrac{\sin\widehat{MAC}}{\sin\widehat{MAB}}$ (4)

Áp dụng định lí hàm số sin trong các tam giác MAC, MAB ta có:

$$\frac{MC}{\sin\widehat{MAC}} = \frac{b}{\sin\widehat{AMC}} \Rightarrow \sin\widehat{MAC} = \frac{MC.\sin\widehat{AMC}}{b} \quad (5)$$

Tương tự $\sin\widehat{MAB} = \dfrac{MB.\sin\widehat{AMB}}{c}$. (6)

Do $\widehat{AMC} + \widehat{AMB} = 180^0 \Rightarrow \sin\widehat{AMC} = \sin\widehat{AMB}$.

Thay (5) (6) vào (4), ta có: $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow$ đpcm.

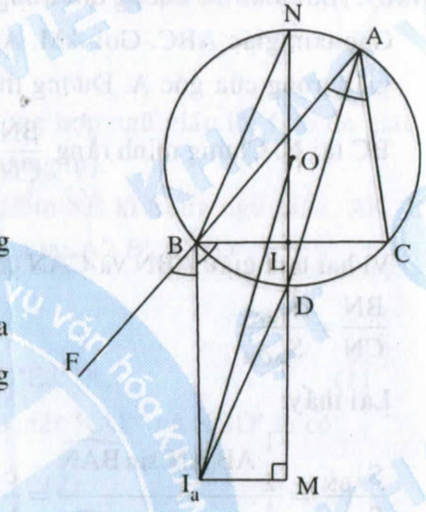
Chú ý: Đường AN gọi là đường đối trung của tam giác ABC (đối với trung tuyến AM).

Bài 10. (Công thức Euler cho khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và bàng tiếp)

Kí hiệu O là tâm đường tròn ngoại tiếp và I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Đặt $d_a = OI_a$. Chứng minh công thức Euler sau:

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a .$$

Giải



Xét tam giác ABI, ta có:

$$\widehat{BI_aD} = \widehat{FBI_a} - \widehat{FAI_a}$$

$$\widehat{DBI_A} = \widehat{I_aBC} - \widehat{CBD}$$

ở đây D là giao điểm của AI_a với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do AI_a, BI_a tương ứng là các phân giác của các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{FBC}$ (do I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC), ta có:

$$\widehat{FAI_a} = \widehat{I_aAC} = \widehat{CBD}$$

$$\widehat{FBI_a} = \widehat{I_aBC}$$

Kết hợp lại suy ra $\widehat{DBI_a} = \widehat{BI_aD} \Rightarrow \Delta BDI_a$ cân đỉnh D

$\Rightarrow DB = DI_a$ (1)

Kẻ $I_aM \perp OD$. Do $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow OD \perp BC$, tức $OM \perp BC$

Xét tam giác ODI_a, theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$d_a^2 = OI_a^2 = OD^2 + DI_a^2 - 2OD.DI_a\cos\widehat{ODI_a} \quad (2)$$

$$\text{Vì } \cos\widehat{ODI_a} = -\cos\widehat{I_aDM} = -\frac{DM}{DI_a} \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) và có: $d_a^2 = OD^2 + DI_a^2 + 2OD.DM$ (4)

Từ (1) và theo hệ thức lượng trong tam giác vuông BDN (N là giao điểm của DO với đường tròn và giả sử $OD \cap BC = L$) ta có:

$BD^2 = DN.DL = 2R.DL$ (5)

Thay (5) vào (4) và có:
$$\begin{aligned} d_a^2 &= R^2 + BD^2 + 2R.DM \\ &= R^2 + 2R.DL + 2R.DM \\ &= R^2 + 2R(DL + DM) \\ &= R^2 + 2R.ML. \quad (6) \end{aligned}$$

Do MI_a // BC, nên ML bằng khoảng cách từ I_a xuống BC, tức là $ML = r_a$, vì thế từ (6) suy ra: $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a \Rightarrow$ đpcm.

Bài 11.

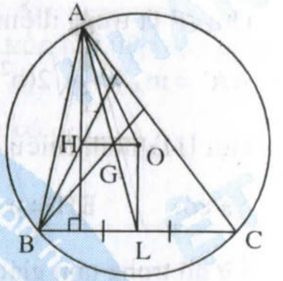
1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

$$OG = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)},$$

ở đây O, G tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác ABC

2. $OH = 2OG = \dfrac{2}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$

Giải



1. Gọi L là trung điểm của BC, khi đó vì G là trọng tâm ΔABC, nên ta có:

$$AG = \frac{2}{3}AL$$

Ta có: $OL = \sqrt{OB^2 - BL^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$,

$$AL = m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Áp dụng định lí Stewart vào tam giác AOL, ta có:

$$\begin{aligned} OG^2 &= \frac{1}{AL}\left(OA^2.GL + OL^2.AG - AL.AG.GL\right) \\ &= \frac{1}{3}OA^2 + \frac{2}{3}OL^2 - GA.GL = \frac{R^2}{3} + \frac{2}{3}\frac{4R^2 - a^2}{4} - \frac{2}{9}AL^2 \\ &= \frac{R^3}{3} + \frac{4R^2 - a^2}{6} - \frac{2}{9}\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\quad OG = \dfrac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$.

2. Theo bài toán về "đường thẳng Euler" ta có H, G, O thẳng hàng và DH = 2OG $\Rightarrow$ đpcm.

Chú ý: Từ phần 1/ suy ra bất đẳng thức sau:

Trong mọi tam giác ABC, ta có: $\quad a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2 \quad$ (*)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow OG = 0 \Leftrightarrow O \equiv G$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều

Dựa vào định lí hàm số sin, ta có trong mọi tam giác ABC thì:

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \le \frac{9}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

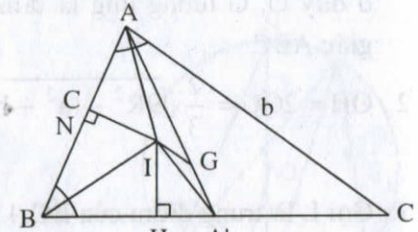
Bài 12.

Gọi I, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng:

$$IG = \frac{1}{3\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

Giải



Gọi A' là trung điểm của BC, khi đó ta có:

$$AA' = m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Gọi H là hình chiếu của I trên BC.

Ta có: $BH = p - b \Rightarrow A'H = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{b - c}{2}$.

Từ đó trong tam giác vuông IHA', ta có:

$$IA' = \sqrt{IH^2 + HA'} = \sqrt{r^2 + \frac{(b-c)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + (b-c)^2}.$$

Kẽ $IN \perp AB \Rightarrow AN = p - a \Rightarrow IA = \sqrt{r^2 + (p-a)^2}$.

Ta có: $AG = \frac{2}{3}AA'$; $A'G = \frac{1}{3}AA'$.

Bây giờ áp dụng định lí Stewart trong ΔIAA', ta có:

$$AA'.IG^2 = IA^2.GA' + IA'^2.GA - GA.GA'.AA'$$

$$\Rightarrow IG^2 = \frac{IA^2.GA'}{AA'} + \frac{IA'^2.GA}{AA'} - GA.GA'$$

$$= \frac{1}{3}\left[r^2 + (p-a)^2\right] + \frac{1}{6}\left[4r^2 + (b-c)^2\right] - \frac{2}{9}AA'^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[r^2 + (p-a)^2\right] + \frac{1}{6}\left[4r^2 + (b-c)^2\right] - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{18}$$

$$= r^2 + \frac{6(p-a)^2 + 3(b-c)^2 - 2b^2 - 2c^2 + a^2}{18}$$

$$= r^2 + \frac{6p^2 - 12pa + 6a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 6bc - 2b^2 - 2c^2 + a^2}{18}$$

$$= r^2 + \frac{6p^2 - 6a(a+b+c) + 6a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 6bc - 2b^2 - 2c^2 + a^2}{18}$$

$$= r^2 + \frac{6p^2 - 6(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2}{18}$$

$$= r^2 + \frac{6p^2 - 3[(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] + a^2 + b^2 + c^2}{18}$$

$$= r^2 + \frac{-6p^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2)}{18} = \frac{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)}{9}$$

Từ đó $IG = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)} \Rightarrow$ đpcm.

Chú ý: Xét một ứng dụng của bài toán trên:

Biết rằng trọng tâm của tam giác ABC nằm trên đường tròn nội tiếp của tam giác. Chứng minh rằng: $5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca)$.

Thật vậy từ giả thiết ta có: $IG \equiv r$. Theo bài toán trên ta có:

$$r = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\Rightarrow \quad 9r^2 = 9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad 3\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca) = 8(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad 5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

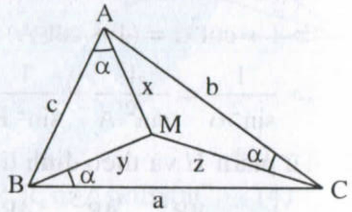
Bài 13. (Bài toán về điểm Broca và góc Broca)

Cho tam giác ABC. M là điểm bên trong tam giác ABC sao cho

$\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}$ (và đặt bằng α).

Chứng minh rằng: $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$.

Giải



Đặt MA = x, MB = y, MC = z

$S_{MAB} = S_1$, $S_{MBC} = S_2$, $S_{MAC} = S_3$

Theo bài 2, ta có (sau khi xét các tam giác MAB, MCA):

$$\cot\alpha = \frac{c^2 + x^2 - y^2}{4S_1} = \frac{a^2 + y^2 - z^2}{4S_2} = \frac{b^2 + z^2 - x^2}{4S_3} \quad (1)$$

Từ (1) và áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau đi đến:

$$\cot\alpha = \frac{(c^2 + x^2 - y^2) + (a^2 + y^2 - z^2) + (b^2 + z^2 - x^2)}{4S_1 + 4S_2 + 4S_3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}.$$

$= \cot A + \cot B + \cot C$ (lại áp dụng bài 2 với ΔABC)

Đó là đpcm.

Chú ý:

1. Điểm M xác định như trên gọi là điểm Broca của ΔABC, còn góc α gọi là góc Broca của tam giác.
2. Điểm M có thể dựng được bằng thước và compa như sau:

   Dễ thấy: $\widehat{BMC} = 180^0 - (\alpha + \widehat{BCM}) = 180^0 - C = B + A$

   Tương tự: $\widehat{AMB} = C + A$

   Vậy M là giao điểm của hai cung chứa góc B + A dựng trên BC và cung chứa góc A + C dựng trên AB.

Bài 14. Giả sử α là góc Broca của tam giác ABC (xem bài 13)

1. Chứng minh: $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C}$.
2. Chứng minh: $\sin\alpha = \dfrac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.
3. $\sin^3\alpha = \sin(A - \alpha)\sin(B - \alpha)\sin(C - \alpha)$.

Giải

1. Vì α là góc Broca của ΔABC, nên theo bài 13 ta có:

$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$$

$$\Rightarrow \cot^2\alpha = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A)$$

Áp dụng bài 1, đi đến:

$$\cot^2\alpha = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = (1 + \cot^2 A) + (1 + \cot^2 B) + (1 + \cot^2 C)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. Từ phần 1/ và theo định lí hàm số sin ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{4R^2}{a^2} + \frac{4R^2}{b^2} + \frac{4R^2}{c^2} = \frac{4R^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^2b^2c^2} \quad (1)$$

Áp dụng công thức $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2b^2c^2} = \dfrac{1}{4R^2S^2}$ (2)

Từ (1) (2) suy ra:

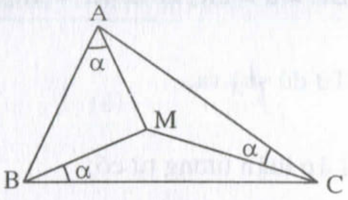
$$\sin^2\alpha = \frac{4S^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

3. Gọi M và α tương ứng là điểm Broca và góc Broca của tam giác ABC

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔMAC, ta có:

$$\frac{MA}{\sin\alpha} = \frac{MC}{\sin(A - \alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{\sin\alpha}{\sin(A - \alpha)}. \quad (1)$$



Lập luận tương tự, có:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{\sin\alpha}{\sin(C - \alpha)}, \quad (2)$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{\sin\alpha}{\sin(B - \alpha)}. \quad (3)$$

Nhân từng vế (1) (2) (3) có:

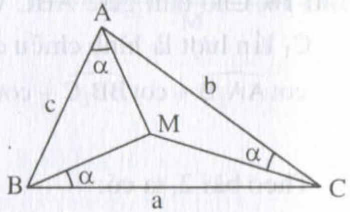
$\sin^3\alpha = \sin(A - \alpha)\sin(B - \alpha)\sin(C - \alpha) \Rightarrow$ đpcm!

Bài 15. Giả sử M là điểm Broca trong ΔABC. Gọi R_a, R_b, R_c tương ứng là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các ΔMBC, MAC, MAB

1. Chứng minh: $R_aR_bR_c = R^3$
2. Chứng minh: $MAMBMC = 8R^3\sin^3\alpha$
3. Chứng minh: $S_{MAC} : S_{MAB} : S_{MBC} = \dfrac{1}{c^2} : \dfrac{1}{a^2} : \dfrac{1}{b^2}$.

Giải

1. Vì M là điểm Broca của ΔABC, nên ta có (xem bài 13)



$\widehat{AMC} = B + C \Rightarrow \sin\widehat{AMC} = \sin A$

$\widehat{BMC} = B + A \Rightarrow \sin\widehat{BMC} = \sin C$

$\widehat{BMA} = C + A \Rightarrow \sin\widehat{BMA} = \sin B$.

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔMAC, ta có:

$AC = 2R_b\sin\widehat{AMC} = 2R_b\sin A$. (1)

Tương tự có: $BC = 2R_a\sin C$, (2)

$AB = 2R_c\sin B$. (3)

Nhân từng vế (1) (2) (3) và có: $abc = 8R_aR_bR_c\sin A\sin B\sin C$. (4)

Lại áp dụng định lí hàm số sin trong ΔABC, ta có:

$abc = 8R^3\sin A\sin B\sin C$. (5)

Từ (4) (5) đi đến: $R_aR_bR_c = R^3 \Rightarrow$ đpcm.

2. Áp dụng định lí hàm số sin trong các ΔMAC, MAB, MBC ta có:

$MA.MB.MC = (2R_b\sin\alpha)(2R_c\sin\alpha)(2R_a\sin\alpha)$

$= 8R_aR_bR_c\sin^3\alpha = 8R^3\sin^3\alpha$. (theo phần 1/)

3. Ta có:

$$S_{MAC} = \frac{1}{2}CA.CM.\sin\alpha = \frac{1}{2}b.CM.\sin\alpha = \frac{1}{2}b(2R_a\sin\alpha)\sin\alpha = bR_a\sin^2\alpha.$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔMBC, ta có:

$BC = a = 2R_a \sin \widehat{BMC} = 2R_a \sin C \Rightarrow R_a = \dfrac{a}{2\sin C}$.

Từ đó suy ra: $S_{MAC} = \dfrac{ab\sin^2\alpha}{2\sin C}$. (6)

Lập luận tương tự có: $S_{MAB} = \dfrac{bc\sin^2\alpha}{2\sin A}$, (7)

$S_{MBC} = \dfrac{ac\sin^2\alpha}{\sin B}$. (8)

Từ (6) (7) (8) đi đến:

$S_{MAC} : S_{MAB} : S_{MBC} = \dfrac{ab}{\sin C} : \dfrac{bc}{\sin A} : \dfrac{ac}{\sin B}$. (9)

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔABC, ta có:

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$. (10)

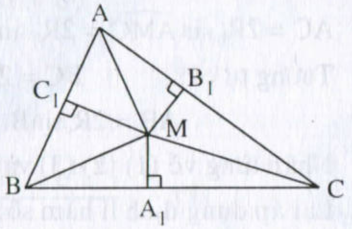
Từ (9) (10) suy ra:

$S_{MAC} : S_{MAB} : S_{MBC} = \dfrac{ab}{c} : \dfrac{bc}{a} : \dfrac{ac}{b} = \dfrac{1}{c^2} : \dfrac{1}{a^2} : \dfrac{1}{b^2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 16. Cho tam giác ABC và M là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Chứng minh: $\cot\widehat{AA_1B} + \cot\widehat{BB_1C} + \cot\widehat{CC_1A} = 0$.

Giải

Theo bài 2, ta có:



$\cot\widehat{AA_1B} = \dfrac{AA_1^2 + BA_1^2 - AB^2}{4S_{AA_1B}}$, (1)

$\cot\widehat{AA_1C} = \dfrac{AA_1^2 + CA_1^2 - AC^2}{4S_{AA_1C}}$. (2)

Vì $\widehat{AA_1B} + \widehat{AA_1C} = 180^0 \Rightarrow \cot\widehat{AA_1B} = -\cot\widehat{AA_1C}$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{AA_1^2 + BA_1^2 - AB^2}{4S_{AA_1B}} = \dfrac{AC^2 - AA_1^2 - CA_1^2}{4S_{AA_1C}}$. (3)

Từ (1) (3) và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\cot\widehat{AA_1B} = \frac{(AA_1^2 + BA_1^2 - AB^2) + (AC^2 - AA_1^2 - CA_1^2)}{4S_{AA_1B} + 4S_{AA_1C}}$$

$$= \frac{(AC^2 - AB^2) + (BA_1^2 - CA_1^2)}{4S}$$

$$= \frac{(AC^2 - AB^2) + [(MB^2 - MA_1^2) - (MC^2 - MA_1^2)]}{4S}$$

$$= \frac{(AC^2 - AB^2) + (MB^2 - MC^2)}{4S}. \qquad (4)$$

Lập luận tương tự có:

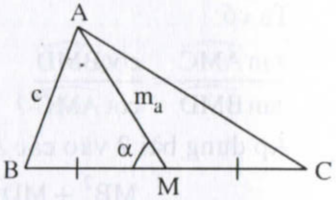
$\cot\widehat{BB_1C} = \dfrac{(BA^2 - BC^2) + (MC^2 - MA^2)}{4S}$, (5)

$\cot\widehat{CC_1A} = \dfrac{(CB^2 - CA^2) + (MA^2 - MB^2)}{4S}$. (6)

Cộng từng vế (4) (5) (6) suy ra đpcm.

Bài 17. Cho tam giác ABC với B > C. Đặt $\widehat{AMB} = \alpha$, ở đây M là trung điểm của BC. Chứng minh: $2\cot\alpha = \cot C - \cot B$.

Giải



Áp dụng bài 2, trong tam giác ABM ta có:

$$\cot\alpha = \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2S_{AMB}}$$

$$= \frac{m_a^2 + \frac{a^2}{4} - c^2}{S}$$

$$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + a^2 - 4c^2}{4S} = \frac{2b^2 - 2c^2}{4S}$$

$= \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} - \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$ (lại theo bài 2)

$= \cot C - \cot B \Rightarrow$ đpcm.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Đặt $\widehat{AGB} = \alpha$. Chứng minh:

$$\cot C - \cot\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6S}.$$

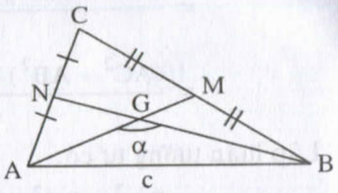
Giải

Áp dụng bài 2 trong các ΔABC và ABG, ta có:

$$\cot C - \cot\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} - \frac{GA^2 + GB^2 - c^2}{4S}. \qquad (1)$$

Lại có:

$$GA^2 + GB^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2) = \frac{4}{9}\,\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$$



$$= \frac{4c^2 + a^2 + b^2}{9}, \qquad (2)$$

$$S_{AGB} = \frac{S}{3}. \qquad (3)$$

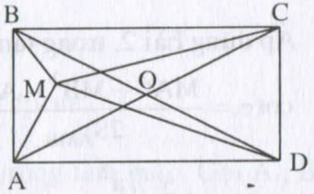
Thay (2) (3) vào (1) và có:

$$\cot C - \cot\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} - \frac{a^2 + b^2 - 5c^2}{12S}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6S} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 19. Cho hình chữ nhật ABCD. M là điểm tùy ý trong hình chữ nhật. Chứng minh: $\dfrac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \dfrac{\tan\widehat{AMC}}{\tan\widehat{BMD}}$.

Giải



Ta có:

$$\frac{\tan\widehat{AMC}}{\tan\widehat{BMD}} = \frac{\cot\widehat{BMD}}{\cot\widehat{AMC}} \qquad (1)$$

Áp dụng bài 2 vào các ΔAMC, BMD thì :

$$\frac{\cot\widehat{BMD}}{\cot\widehat{AMC}} = \frac{\dfrac{MB^2 + MD^2 - BD^2}{4S_{BMD}}}{\dfrac{MA^2 + MC^2 - AC^2}{4S_{AMC}}} = \frac{S_{AMC}}{S_{BMD}}.\frac{MB^2 + MD^2 - BD^2}{MA^2 + MC^2 - AC^2}. \qquad (2)$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có theo hệ thức lượng trong các tam giác MBD và MAC.

$$\begin{cases} MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \dfrac{BD^2}{2} \\ MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \dfrac{AC^2}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Do BD = AC nên thay (3) vào (2) và có đpcm.

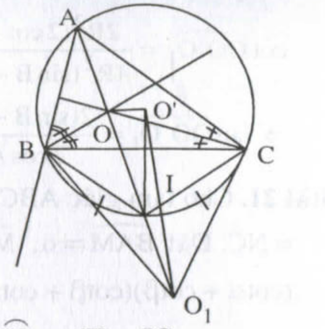
Bài 20. Cho tam giác ABC với B > C. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp, O là tâm đường tròn nội tiếp, còn O_1 là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh: $\tan\widehat{OO'O_1} = \dfrac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1}$.

Giải

Ta có: $\widehat{OBO_1} = \widehat{OCO_1} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BOCO_1$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi I là trung điểm của OO_1

$\Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BOCO_1$



$\Rightarrow \widehat{BIC} = 2\widehat{BO_1C}$

Rõ ràng $\widehat{BO_1C} = 180^0 - \dfrac{1}{2}(180^0 - B + 180^0 - C)$

$$= \frac{B+C}{2}$$

Từ đó suy ra $\widehat{BIC} = B + C$

$\Rightarrow A + \widehat{BIC} = A + B + C = 180^0$

$\Rightarrow$ ABIC là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ I nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\overset{\frown}{IB} = \overset{\frown}{IC} \Rightarrow IB = IC$.

Áp dụng bài 2 vào $\Delta OO'O_1$, ta có:

$$\cot\widehat{OO'O_1} = \frac{O'O^2 + O'O_1^2 - OO_1^2}{4S_{OO'O_1}} \qquad (1)$$

Ta có: $S_{OO'O_1} = 2S_{IOO'} = 2.\dfrac{1}{2}IO.IO'\sin\widehat{OIO'}$

$$= \frac{1}{2}OO_1.IO'.\sin\widehat{OIO'}. \qquad (2)$$

Vì $\widehat{OIO'} = \dfrac{B-C}{2}$, nên từ (2) có:

$$S_{OO'O_1} = \frac{1}{2}R.OO_1\sin\frac{B-C}{2}. \qquad (3)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔBOC (với chú ý đường tròn ngoại tiếp của tam giác này chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BOCO_1$), ta có:

$$BC = OO_1\sin\widehat{BOC} = OO_1\sin\frac{B+C}{2} \text{ (vì } \widehat{BOC} + \frac{B+C}{2} = 180^0)$$

$$= OO_1\cos\frac{A}{2}.$$

Lại theo định lí hàm số sin trong ΔABC, ta có: BC = 2RsinA.

Từ đó đi đến: $2R\sin A = OO_1\cos\dfrac{A}{2} \Rightarrow OO_1 = 4R\sin\dfrac{A}{2}$. (4)

Thay (4) vào (3) và có:

$$S_{OO'O_1} = \frac{1}{2}R.4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = 2R^2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$= R^2(\sin B - \sin C). \qquad (5)$$

Lại có: $O'O^2 + O'O_1^2 - OO_1^2 = 2R^2 - 8R^2\sin^2\dfrac{A}{2}$

$$= 2R^2\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) = 2R^2(2\cos A - 1). \ (6)$$

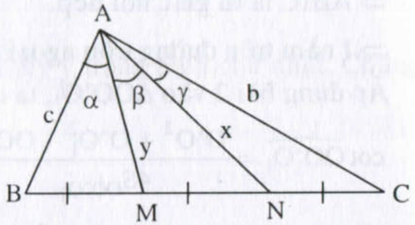
Thay (5) (6) vào (1) đi đến:

$$\cot\widehat{OO'O_1} = \frac{2R^2(2\cos A - 1)}{4R^2(\sin B - \sin C)} = \frac{2\cos A - 1}{2(\sin B - \sin C)}$$

$$\Rightarrow \tan\widehat{OO'O_1} = \frac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 21. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy ba điểm M, N sao cho BM = MN = NC. Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$, $\widehat{MAN} = \beta$, $\widehat{NAC} = \gamma$. Chứng minh:

$(\cot\alpha + \cot\beta)(\cot\beta + \cot\gamma) = 4(1 + \cot^2\beta)$.



Giải

Do BM = MN = NC

$\Rightarrow S_{ABM} = S_{AMN} = S_{ANC} = \frac{S}{3}$ (đặt t = S)

Đặt AN = x, AM = y

Áp dụng bài 2 vào các tam giác ABM, AMN, ANC, ta có:

$$VT = \left(\frac{c^2 + y^2 - \frac{a^2}{9}}{4s} + \frac{y^2 + x^2 - \frac{a^2}{9}}{4s}\right)\left(\frac{y^2 + x^2 - \frac{a^2}{9}}{4s} + \frac{x^2 + b^2 - \frac{a^2}{9}}{4s}\right)$$

$$= \frac{c^2 + x^2 + 2y^2 - \frac{2a^2}{9}}{4s} . \frac{y^2 + b^2 + 2x^2 - \frac{2a^2}{9}}{4s} . \qquad (1)$$

$$\text{Do} \begin{cases} c^2 + x^2 = 2y^2 + \frac{BN^2}{2} = 2y^2 + \frac{2a^2}{9} \\ y^2 + b^2 = 2x^2 + \frac{MC^2}{2} = 2x^2 + \frac{2a^2}{9}. \end{cases} \qquad (2)$$

Nên thay (2) vào (1) ta được: $VT = \frac{y^2x^2}{s^2}$ (3)

Vì $s = S_{AMN} = \frac{1}{2}xy\sin\beta \Rightarrow s^2 = \frac{x^2y^2\sin^2\beta}{4}$ (4)

Thay (4) vào (3) và có:

$$VT = \frac{4}{\sin^2\beta} = 4(1 + \cot^2\beta) = VP \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Chú ý:

1. Ta trình bày cách giải khác cho bài trên mà không sử dụng kết quả của bài 2.

Ta có: $VT = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} . \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$ (5)

Áp dụng công thức:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{2S_{ABN}}{AB.AN} = \frac{4s}{cx}$$

$$\sin(\beta+\gamma) = \frac{2S_{AMC}}{AM.AC} = \frac{4s}{yb}$$

$$\sin\alpha = \frac{2S_{ABM}}{AB.AM} = \frac{2s}{cy}$$

$$\sin\gamma = \frac{2S_{ANC}}{AN.AC} = \frac{2s}{xb}$$

Thay vào (5), ta có: $VT = \frac{\frac{16s^2}{bcxy}}{\frac{4s^2}{bcxy}\sin^2\beta} = \frac{4}{\sin^2\beta} = 4(1 + \cot^2\beta)$.

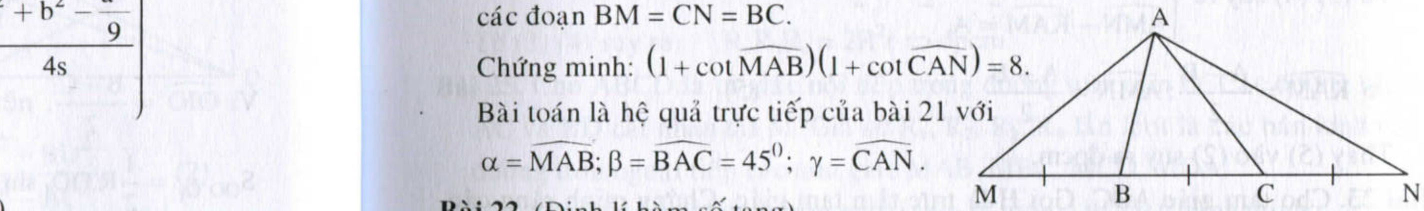
Đó là đpcm.

2. Ta có bài toán sau: Cho tam giác ABC có $A = 45^0$. Kéo dài BC về hai phía các đoạn BM = CN = BC.

Chứng minh: $\left(1 + \cot\widehat{MAB}\right)\left(1 + \cot\widehat{CAN}\right) = 8$.

Bài toán là hệ quả trực tiếp của bài 21 với

$\alpha = \widehat{MAB}$; $\beta = \widehat{BAC} = 45^0$; $\gamma = \widehat{CAN}$.



Bài 22. (Định lí hàm số tang)

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có: $\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$.

Giải

Theo định lí hàm số sin, ta có:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R(\sin A + \sin B)} = \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$= \cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Chú ý: Xem cách giải "hình học" của bài toán trên.

Có thể cho rằng a > b (Nếu a = b thì kết quả là hiển nhiên)

Do a > b, nên đặt CM = b; CN = b trên BC và BC kéo dài.

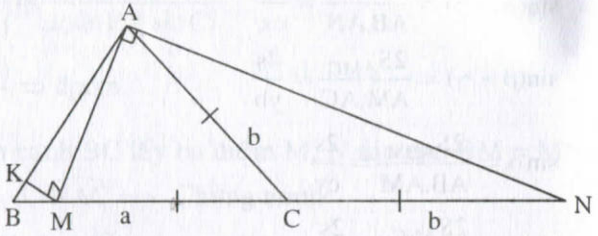
Khi đó MAN là tam giác vuông tại A. Ta có:

BM = a – b; BN = a + b

Kẻ MK ⊥ AM

⇒ MK // NA.

Theo định lí Talet, ta có:



$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{BM}{BN}=\frac{KM}{AN}\ (1)$$

Ta có:

$KM = AM\tan\widehat{KAM};\ AN=\tan\widehat{AMN}$

Từ đó thay vào (1) và có: $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\widehat{KAM}}{\tan\widehat{AMN}}$ (2)

Ta có: $\widehat{AMN}=\widehat{KAM}+\widehat{ABN}=\widehat{KAM}+B$ (3)

Mặt khác: $\widehat{AMN}=\widehat{AMC}=\widehat{MAC}=A-\widehat{KAM}$ (4)

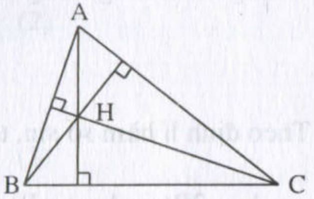
Từ (3) (4) suy ra $\begin{cases}\widehat{AMN}-\widehat{KAM}=B\\ \widehat{AMN}+\widehat{KAM}=A\end{cases}$

$\Leftrightarrow \widehat{KAM}=\dfrac{A-B}{2};\ \widehat{AMN}=\dfrac{A+B}{2}$ (5)

Thay (5) vào (2) suy ra đpcm.

Bài 23. Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HAC, HAB bằng nhau.

Giải



Kí hiệu R_a, R_b, R_c tương ứng là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HAC, HAB.

Theo định lí hàm số sin trong ΔHBC, ta có:

$$R_a=\frac{BC}{2\sin\widehat{BHC}}=\frac{a}{2\sin A}\quad(1)$$

(do $\widehat{BHC}+A=180^0$)

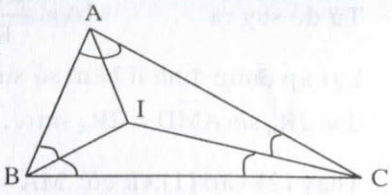
Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔABC, ta có: $\dfrac{a}{2\sin A}=R$,

Vậy từ (1) suy ra $R_a = R$

Lập luận tương tự có: $R_b = R$, $R_c = R \Rightarrow R_a = R_b = R_c \Rightarrow$ đpcm.

Bài 24. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Gọi R_a, R_b, R_c tương ứng là các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, IAC, IAB. Chứng minh $R_aR_bR_c = 2R^2r$.

Giải



Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔIBC, ta có:

$$R_a=\frac{BC}{2\sin\widehat{BIC}}=\frac{a}{2\sin\left(180-\dfrac{B+C}{2}\right)}$$

$$=\frac{a}{2\sin\dfrac{B+C}{2}}=\frac{2R\sin A}{2\cos\dfrac{A}{2}}=2R\cos\frac{A}{2}\quad(1)$$

Tương tự ta có: $R_b=2R\cos\dfrac{B}{2};\ R_c=2R\cos\dfrac{C}{2}$ (2)

Từ (1) (2) có: $R_aR_bR_c=8R^3\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$=2R^2\left(4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\ (3)$$

Mặt khác, ta có: $r=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ (4)

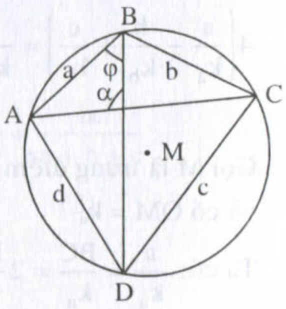
Từ (3) (4) suy ra $R_aR_bR_c = 2R^2r \Rightarrow$ đpcm.

Bài 25. Cho ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại M. Giả sử R_1, R_2, R_3, R_4 lần lượt là các bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MCD, MDA.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Chứng minh:

$$R=\sqrt{\frac{(R_1R_4+R_2R_3)(R_1R_2+R_3R_4)}{R_1R_3+R_2R_4}}.$$

Giải



Đặt AB = a, BC = b, CD = c, DA = d,

$\widehat{AMB}=\alpha;\ \widehat{ABM}=\varphi$.

Áp dụng định lí hàm số sin trong các tam giác MAB, MBC, MCD, MDA, ta có:

$$R_1=\frac{a}{2\sin\alpha};\ R_2=\frac{b}{2\sin\widehat{BMC}}=\frac{b}{2\sin\alpha}$$

$$R_3=\frac{c}{2\sin\alpha};\ R_4=\frac{d}{2\sin\widehat{AMD}}=\frac{d}{2\sin\alpha}$$

Lại theo định lí hàm số sin trong các tam giác MAB, BAD ta có:

$MA=2R_1\sin\varphi;\ \sin\varphi=\dfrac{d}{2R}$

(chú ý R cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABD)

Từ đó suy ra $MA = \frac{R_1 d}{R}$. (1)

Lại áp dụng định lí hàm số sin trong ΔMDA, thì:

$d = 2R_4 \sin\widehat{AMD} = 2R_4 \sin\alpha$. (2)

Thay (2) vào (1) và có: $MA = \frac{2R_1R_4\sin\alpha}{R}$. (3)

Lập luận tương tự có: $MC = \frac{2R_2R_3\sin\alpha}{R}$. (4)

Từ (3) (4) suy ra: $AC = MA + MC = \frac{2\sin\alpha(R_1R_4 + R_2R_3)}{R}$. (5)

Tương tự có: $BD = \frac{2\sin\alpha(R_1R_2 + R_3R_4)}{R}$. (6)

Theo định lí Ptoleme với tứ giác nội tiếp ABCD, ta có:

AC.BD = ac + bd.

Từ (5) (6) và các kết quả trên suy ra:

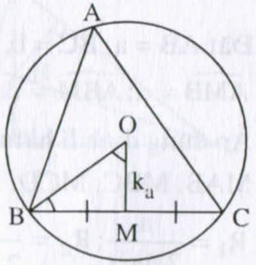
$$\frac{4\sin^2\alpha(R_1R_4 + R_2R_3)(R_1R_2 + R_3R_4)}{R^2} = 4\sin^2\alpha(R_1R_3 + R_2R_4).$$

Từ đó suy ra: $R = \sqrt{\frac{(R_1R_4 + R_2R_3)(R_1R_2 + R_3R_4)}{R_1R_3 + R_2R_4}} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 26. Giả sử k_a, k_b, k_c tương ứng là các khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC đến ba cạnh BC, AC, AB. Chứng minh

$$4\left(\frac{a}{k_a} + \frac{b}{k_b} + \frac{c}{k_c}\right) = \frac{abc}{k_a k_b k_c}.$$

Giải



Gọi M là trung điểm của BC, thì $OM \perp BC$ và có $OM = k_a$

Ta có: $\frac{a}{k_a} = \frac{BC}{k_a} = 2\frac{BM}{k_a} = 2\tan\widehat{BOM} = 2\tan A$.

Lập luận tương tự có: $\frac{b}{k_b} = 2\tan B$; $\frac{c}{k_c} = 2\tan C$.

Vậy $4\left(\frac{a}{k_a} + \frac{b}{k_b} + \frac{c}{k_c}\right) = 8(\tan A + \tan B + \tan C)$. (1)

Vì ABC không phải là tam giác vuông, nên ta có:

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. (2)

Từ (1) (2) suy ra: $4\left(\frac{a}{k_a} + \frac{b}{k_b} + \frac{c}{k_c}\right) = 8\tan A\tan B\tan C$

$= (2\tan A)(2\tan B)(2\tan C)$

$= \frac{abc}{k_a k_b k_c} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 27. (Bài toán Cacno)

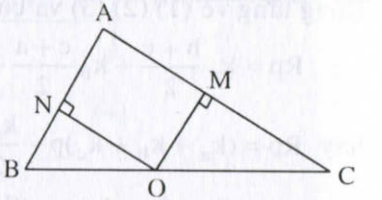
Chứng minh rằng trong một tam giác ABC, tổng các khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến các cạnh bằng tổng các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp.

Giải

Xét các trường hợp sau đây:

1. Nếu ABC là tam giác vuông.

Giả sử $A = 90^0$, khi đó gọi O là trung điểm của BC, thì nếu kẻ $OM \perp AC$, $ON \perp AB$, ta có:



$d(O; AC) = OM = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$

$d(O; AB) = ON = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}$

$d(O; BC) = O$,

ở đây kí hiệu d(O; AC), d(O; AB), d(O; BC) lần lượt là khoảng cách từ O tới ba cạnh AC, AB, BC của tam giác.

Từ đó $d(O; AC) + d(O; AB) + d(O; BC) = \frac{b+c}{2}$. (1)

Dễ thấy $R = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$. Áp dụng công thức: $r = \frac{S}{p} = \frac{bc}{2p} = \frac{bc}{a+b+c}$.

Khi đó $d(O; AC) + d(O; AB) + d(O; BC) = R + r$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{b+c}{2} = \frac{a}{2} + r$

$\Leftrightarrow \frac{b+c}{2} = \frac{a}{2} + \frac{bc}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow (b + c - a)(b + c + a) = 2bc$

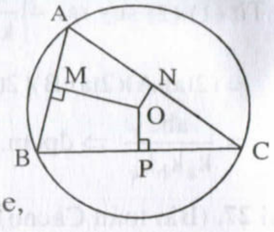
$\Leftrightarrow (b + c)^2 - a^2 = 2bc$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$. (3)

Vì (3) đúng (định lí Pitago) $\Rightarrow$ (2) đúng.

Vậy khi ABC là tam giác vuông kết luận của bài toán là đúng.

2. Nếu ABC là tam giác nhọn.



Kẻ OM ⊥ AB, ON ⊥ AC, OP ⊥ BC.

Đặt $OP = k_a$, $ON = k_b$, $OM = k_c$.

Ta có k_a, k_b, k_c lần lượt là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O tới ba cạnh BC, AC, AB

Vì AMON là tứ giác nội tiếp, nên theo định lí Ptoleme,

ta có: OA.MN = OM.AN + ON.AM

hay $R.\frac{a}{2} = k_c\frac{b}{2} + k_b\frac{c}{2}$ (1)

Lập luận tương tự trong các tứ giác nội tiếp BMOP và CNOP cũng có:

$$R.\frac{b}{2} = k_a\frac{c}{2} + k_c\frac{a}{2}, \qquad (2)$$

$$R.\frac{c}{2} = k_b\frac{a}{2} + k_a\frac{b}{2}. \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có:

$$Rp = k_a\frac{b+c}{2} + k_b\frac{c+a}{2} + k_c\frac{a+b}{2},$$

hay $Rp = (k_a + k_b + k_c)p - \frac{k_a a}{2} - \frac{k_b b}{2} - \frac{k_c c}{2}$

$$= (k_a + k_b + k_c)p - (S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB})$$

$$= (k_a + k_b + k_c)p - S,$$

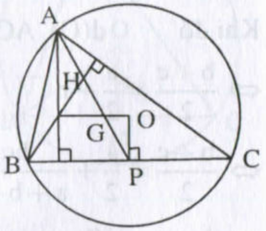
Từ đó ta có: $Rp = (k_a + k_b + k_c)p - pr$, hay $R + r = k_a + k_b + k_c$.

Vậy khi ABC là tam giác nhọn thì kết luận bài toán đúng.

3. Nếu ABC là tam giác có góc tù (chẳng hạn $A > 90^0$). Chứng minh tương tự như phần 2/ (xin dành cho bạn đọc)

Chú ý:

1. Từ bài trên ta suy ra kết quả sau đây:



Giả sử H là trực tâm ΔABC.

Khi đó ta có: AH + BH + CH = 2(R + r).

Thật vậy nếu gọi G là trọng tâm ΔABC

Khi đó ta có H, G, O thẳng hàng và GH = 2GO (theo đường thẳng Euler).

Kí hiệu P là trung điểm của BC. Kí hiệu k_a, k_b, k_c như trong phần trên.

Do GH = 2GO ⇒ $HA = 2OP = 2k_a$.

Tương tự $BH = 2k_b$, $CH = 2k_c$.

Từ đó $AH + BH + CH = 2(k_a + k_b + k_c) = 2(R + r)$

⇒ đpcm.

2. Ta có thêm kết quả sau đây:

Nếu gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh:

$$AH.BH + BH.CH + CH.HA = -4R^2 + 2r^2 + 4Rr + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Ta có:

$2(AH.BH + Bh.CH + CH.HA) = (AH + BH + CH)^2 - (AH^2 + BH^2 + CH^2)$ (1)

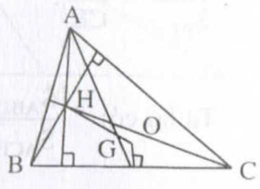
Theo chú ý 1/ thì

$(AH + BH + CH)^2 = 4(R + r)^2$. (2)

Áp dụng công thức Leibvitz, ta có:

$HA^2 + Hb^2 + HC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GH^2$, (3)

ở đây G là trọng tâm ΔABC.



Ta có:

$$GA^2 + GB^2\ GC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2c^2 + 2b^2 - c^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (4)$$

Ta có: GH = 2GO (theo đường thẳng Euler)

Mặt khác theo các bài trước, ta có: $OG = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$

$$\Rightarrow GH^2 = 4GO^2 = \frac{4}{9}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]. \qquad (5)$$

Thay (2) (3) (4) (5) vào (1) đi đến:

2(AH.BH + BH.CH + CH.HA)

$$= 4(R + r)^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 12R^2 + \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$= -8R^2 + 4r^2 + 8Rr + a^2 + b^2 + c^2$, hay

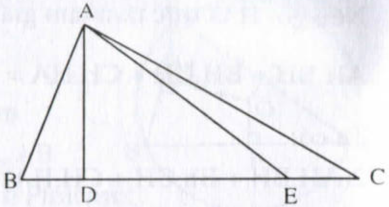
$$AH.BH + BH.CH + CH.HA = -4R^2 + 2r^2 + 4Rr + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Bài 28. (Bài toán Stainơ)

Hai đường thẳng cùng xuất phát từ đỉnh của một góc của tam giác và đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc đó, gọi là những đường thẳng đẳng giác. Chứng minh rằng tỉ số giữa tích các khoảng cách từ một đỉnh của tam giác đến chân các đường đẳng giác và tích các khoảng cách từ đỉnh kia cũng đến chân các đường đẳng giác nói trên bằng tỉ số các bình phương của các cạnh kề.

Giải

Giả sử AD và AE là các đường đẳng giác.



Khi đó hiển nhiên ta có:

$\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$. (1)

Khi đó bài toán đã ra đòi hỏi chứng minh hệ thức sau:

$\dfrac{BD.BE}{CD.CE} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. (2)

Vì hai tam giác ABD và AEC có chung chiều cao kẻ từ A, nên

$\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \dfrac{BD}{CE}$. (3)

Ta lại có: $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB.AD.\sin\widehat{BAD}}{\frac{1}{2}AC.AE.\sin\widehat{EAC}}$,

do đó từ (1) suy ra $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \dfrac{AB.AD}{AC.AE}$. (4)

Từ (3) (4) đi đến $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{AB}{AC}\dfrac{AD}{AE}$ (5)

Tương tự, ta có: $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{AB}{AC}\dfrac{AE}{AD}$. (6)

(chú ý là $\widehat{BAE} = \widehat{DAE}$).

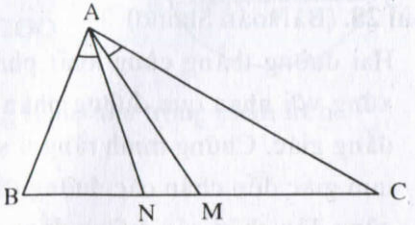
Nhân từng vế (5) (6) suy ra (2) đúng ⇒ đpcm!

Bài 29. Trong một tam giác đường thẳng đẳng giác với một trung tuyến gọi là một đường đối trung. Chứng minh rằng đường đối trung chia trong cạnh đối diện thành những phần tỉ lệ với bình phương các cạnh kề.

Giải

Giả sử AN là đường đối trung, tức là AN và trung tuyến AM là các đường đẳng giác.

Theo bài toán Stainơ (bài 28), ta có:



$\dfrac{NB.MB}{NC.MC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ (1)

Vì MB = MC, nên từ (1) suy ra:

$\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ ⇒ đpcm!

Bài 30. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và đường đối trung AD

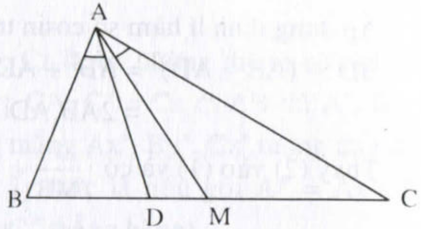
1. Chứng minh $\dfrac{AD}{AM} = \dfrac{2bc}{b^2 + c^2}$.

2. Chứng minh $AD = \dfrac{bc\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{b^2 + c^2}$.

Giải

1. Từ giả thiết ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$.

Ta có: (lập luận như các bài trên)



$\dfrac{S_{ABD}}{S_{AMC}} = \dfrac{BD}{MC}$. (1)

$\dfrac{S_{ABD}}{S_{AMC}} = \dfrac{AB.AD}{AM.AC}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\dfrac{BD}{MC} = \dfrac{AB.AD}{AM.AC} = \dfrac{AD}{AM}\dfrac{c}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AM} = \dfrac{BD}{MC}\dfrac{b}{c} = BD\dfrac{2b}{ac}$ (3) (do $MC = \dfrac{a}{2}$).

Vì AD là đường đối trung, nên theo bài 29 ta có:

$\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{c^2}{b^2} \Rightarrow \dfrac{BD}{c^2} = \dfrac{DC}{b^2} = \dfrac{BD + DC}{c^2 + b^2}$ hay $\dfrac{BD}{c^2} = \dfrac{BC}{b^2 + c^2} = \dfrac{a}{b^2 + c^2}$

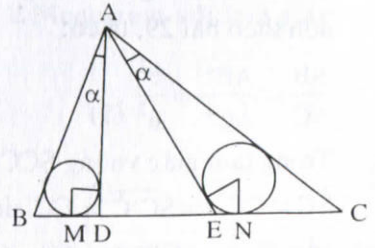
$\Rightarrow BD = \dfrac{ac^2}{b^2 + c^2}$. (4)

Thay (4) vào (3) và có: $\dfrac{AD}{AM} = \dfrac{2b}{ac}.\dfrac{ac^2}{b^2 + c^2} = \dfrac{2bc}{b^2 + c^2}$ ⇒ đpcm.

2. Từ 1/ và do $AM^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ ⇒ đpcm.

Bài 31. Cho tam giác ABC. Giả sử AD và AE là hai đường đẳng giác. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACE tiếp xúc với cạnh BC tương ứng tại M, N. Chứng minh $\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{1}{NC} + \dfrac{1}{NE}$.

Giải



Do AD và AE là hai đường đẳng giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (và ta đặt = α)

Theo tính chất của hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm ta có:

$BM = p_1 - AD$; $DM = p_1 - AB$, ở đây p_1 là nửa chu vi của ΔABD.

Vậy $MB = \dfrac{AB + AD + BD}{2} - AD = \dfrac{AB + BD - AD}{2}$,

$MD = \dfrac{AB + AD + BD}{2} - AB = \dfrac{BD + AD - AB}{2}$.

Từ đó $\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{2}{AB + BD - AD} + \dfrac{2}{BD + AD - AB}$

$$= \frac{4BD}{BD^2 - (AB - AD)^2}. \qquad (1)$$

Áp dụng định lí hàm số cosin trong ΔABD, ta có:

$$BD^2 - (AB - AD)^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos\alpha - AB^2 - AD^2 + 2AB.AD$$
$$= 2AB.AD(1 - \cos\alpha). \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) và có: $\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{2BD}{AB.AD(1 - \cos\alpha)}$. (3)

Lập luận tương tự có: $\dfrac{1}{NC} + \dfrac{1}{NE} = \dfrac{2EC}{AE.AC(1 - \cos\alpha)}$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{1}{NC} + \dfrac{1}{NE} \Leftrightarrow \dfrac{BD}{AB.AD} = \dfrac{EC}{AE.AC}$

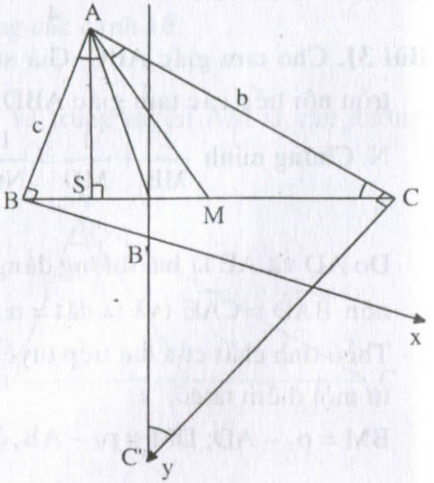
$$\Leftrightarrow \frac{BD}{EC} = \frac{AB.AD}{AE.AC}. \qquad (5)$$

Rõ ràng $\dfrac{BD}{EC} = \dfrac{S_{ABD}}{S_{AEC}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB.AD\sin\alpha}{\frac{1}{2}AE.AC\sin\alpha} = \dfrac{AB.AD}{AE.AC}$.

Vậy (5) đúng ⇒ đpcm.

Bài 32. Cho tam giác ABC. Đường đối trung AS cắt BC tại S. Kẽ Bx ⊥ AB, Cy ⊥ AC. Đường vuông góc với BC tại S cắt Bx, Cy tương ứng tại B’, C’.

Chứng minh $\dfrac{CC'}{BB'} = \dfrac{b^3}{c^3}$.



Giải

Do AS là đường đối trung, nên theo bài 29, ta có:

$\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{c^2}{b^2}$. (1)

Trong tam giác vuông SCC’, ta có:

$SC = CC'\sin\widehat{SC'C} = CC'\sin C$

(do $\widehat{SC'C} = C$ là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Lại có $\sin C = \dfrac{h_a}{b} \Rightarrow SC = CC'\dfrac{h_a}{b}$. (2)

Tương tự có: $SB = BB'\dfrac{h_a}{c}$. (3)

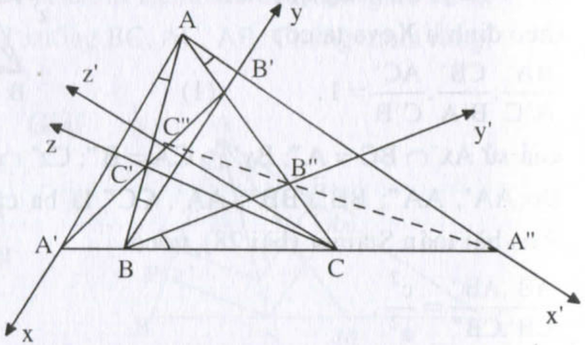
Thay (2) (3) vào (1) có: $\dfrac{BB'\frac{h_a}{c}}{CC'\frac{h_a}{b}} = \dfrac{c^2}{b^2} \Rightarrow \dfrac{BB'}{CC'}.\dfrac{b}{c} = \dfrac{c^2}{b^2} \Rightarrow \dfrac{CC'}{BB'} = \dfrac{b^3}{c^3}$

⇒ đpcm.

Bài 33. Cho tam giác ABC. Giả sử Ax, By, Cz là ba đường thẳng có tính chất sau đây: Gọi A’ = Ax ∩ BC, B’ = By ∩ CA, C’ = Cz ∩ AB thì A’, B’, C’ thẳng hàng. Chứng minh rằng các đường thẳng Ax’, By’, Cz’ tương ứng đẳng giác với Ax, By, Cz cũng có tính chất ấy (tức là nếu gọi A” = Ax’∩BC, B” = Cy’∩CA, C” = Cz∩AB thì A”, B”, C” thẳng hàng).

Giải

Vì AA’, AA”; BB’, BB”, CC’, CC” là ba cặp đường thẳng đẳng giác nên theo bài toán Stainer (Bài 28), ta có:



$\dfrac{AB'.AB"}{CB'.CB"} = \dfrac{c^2}{a^2}$,

$\dfrac{CA'.CA"}{BA'.BA"} = \dfrac{b^2}{c^2}$,

$\dfrac{BC'.BC"}{AC'.AC"} = \dfrac{a^2}{b^2}$.

Nhân từng vế ba đẳng thức trên ta có:

$\dfrac{AB'.CA'.BC'}{CB'.BA'.AC'}.\dfrac{AB".CA".BC"}{CB".BA".AC"} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC'}{CA}\right).\left(\frac{AB"}{B"C}.\frac{CA"}{A"B}.\frac{BC"}{C"A}\right) = 1 \qquad (1)$$

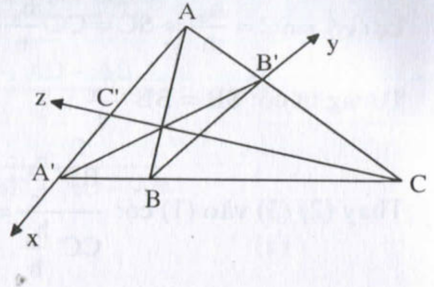
Vì A’, B’, C’ thẳng hàng nên áp dụng định lí Menelauyt với tam giác ABC và cặp bộ ba Ax, By, Cz, ta có:

$$\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC'}{CA} = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $\dfrac{AB"}{B"C}.\dfrac{CA"}{A"B}.\dfrac{BC"}{C"A} = 1$ (3)

Từ (3) lại áp dụng định lí Menelauyt với tam giác ABC và cặp bộ ba Ax’, By’, Cz’ ta có A”, B”, C” thẳng hàng ⇒ đpcm.

Chú ý: Nhắc lại định lí Menelauyt sau đây (xem hình học lớp 10)



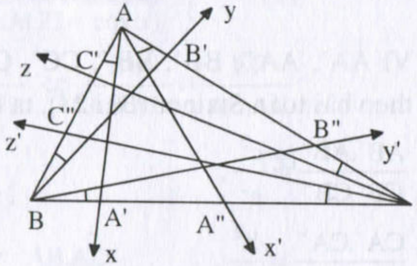
Cho tam giác ABC. Ba đường thẳng Ax, By, Cz lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Khi đó A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A}=1.$$

Bài 34. Cho tam giác ABC. Bộ ba đường thẳng Ax, By, Cz gọi là một bộ ba XeVa nếu Ax, By, Cz đồng quy.

Giả sử Ax, By, Cz là bộ ba XeVa. Chứng minh rằng bộ ba Ax', By', Cz' cũng là một bộ ba Xeva nếu Ax', By', Cz' tương ứng là các đường đẳng giác với Ax, By, Cz.

Giải



Giả sử Ax, By, Cz lần lượt cắt BC, CA,AB tại A', B', C'.

Vì Ax, By, Cz đồng quy nên theo định lí Xeva ta có:

$$\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{AC'}{C'B}=1. \qquad (1)$$

Giả sử Ax' ∩ BC = A"; By' ∩ CA = B"; Cz' ∩ AB = C".

Do AA', AA"; BB', BB"; AA', CC" là ba cặp đường thẳng đẳng giác nên theo bài toán Stainer (bài 28), ta có:

$$\frac{AB'.AB"}{CB'.CB"}=\frac{c^2}{a^2},$$

$$\frac{CA'.CA"}{BA'.BA"}=\frac{b^2}{a^2},$$

$$\frac{BC'.BC"}{AC'.AC"}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Nhân từng vế ba đẳng thức trên đi đến

$$\left(\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{BA'}.\frac{BC'}{AC'}\right)\left(\frac{AB"}{CB"}.\frac{CA"}{BA"}.\frac{BC"}{AC"}\right)=1. \qquad (2)$$

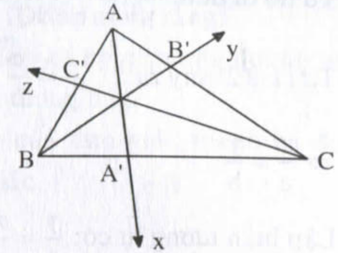
Từ (1) (2) suy ra: $\frac{AB"}{B"C}.\frac{CA"}{A"B}.\frac{BC"}{C"A}=1.$ (3)

Từ (3) và lại theo định lí Xeva, ta có:

AA", BB", CC" (tức là Ax', By', Cz') đồng quy ⇒ đpcm

Chú ý:

1. Nhắc lại định lí Xeva.



Cho tam giác ABC. Ba đường thẳng Ax, By, Cz lần lượt cắt BC, AC, AB tại A', B', C'. Khi đó Ax, By, Cz đồng quy khi và chỉ khi ta có:

$$\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A}=1.$$

Như đã biết định lí Xeva là trường hợp riêng của định lí Pôngsơ lê.

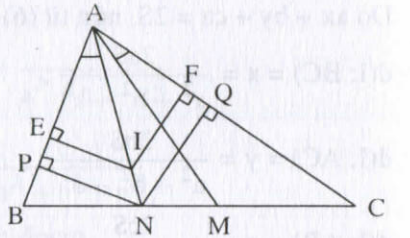
2. Từ bài trên ta suy ra kết quả sau đây

Trong một tam giác thì ba đường đối trung là một bộ ba Xeva (tức là chúng đồng quy). Điểm đồng quy gọi là điểm Lemoine (Lơ-Moan)

Thật vậy các đường đối trung là các đường đẳng giác với các trung tuyến của tam giác ABC. Vì ba đường trung tuyến của một tam giác đồng quy nên chúng là một bộ ba Xeva. Theo bài trên suy ra ba đường đối trung cũng là một bộ ba Xeva ⇒ dpcm.

Bài 35. Cho tam giác ABC. Giả sử I là điểm Lemoine của tam giác và x, y, z tương ứng là các khoảng cách từ I xuống BC, AC, AB. Chứng minh rằng: $xh_a = yh_b = zh_c$.

Giải



Xét đại diện đường đối trung AN.

Vì I là điểm Lemoiner, nên nó là giao điểm của ba đường đối trung (xem bài 34).

Nói riêng I ∈AN.

Kẻ IE, NP ⊥ AB,

IF, NQ ⊥ AC.

Theo định lí Talet, ta có: $\frac{NP}{NQ}=\frac{IE}{IF}=\frac{z}{y}$ (1)

Do AN là đường đối trung, nên theo bài 29 ta có:

$$\frac{NB}{NC}=\frac{c^2}{b^2}\Rightarrow\frac{S_{ABN}}{S_{ANC}}=\frac{NB}{NC}=\frac{c^2}{b^2}.$$

Lại có $\frac{S_{ABN}}{S_{ANC}}=\frac{\frac{1}{2}c.NP}{\frac{1}{2}b.NQ}=\frac{c}{b}.\frac{NP}{NQ}.$

Từ đó đi đến: $\frac{c^2}{b^2}=\frac{c}{b}.\frac{NP}{NQ}\Rightarrow\frac{NP}{NQ}=\frac{c}{b}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\frac{z}{y}=\frac{c}{b}\Rightarrow zb=cy$

$\Rightarrow\frac{z}{c}=\frac{y}{b}$. (3)

Lập luận tương tự có: $\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$. (4)

Vậy ta có: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

$\Rightarrow\frac{xh_a}{ah_a}=\frac{yh_b}{bh_b}=\frac{zh_c}{ch_c}$. (5)

Do $ah_a=bh_b=ch_c$ (vì cùng = 2S), nên từ (5) đi đến $xh_a=yh_b=zh_c\Rightarrow$ đpcm.

Chú ý:

1. Từ bài trên ta suy ra công thức tính khoảng cách từ điểm Lơ-moan I đến ba cạnh BC, AC, AB như sau:

Theo bài trên ta có:

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$ (6)

Do ax + by + cz = 2S, nên từ (6) ta có:

$d(I;BC)=x=\frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}$,

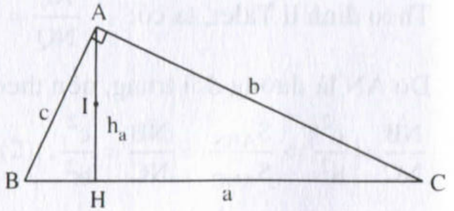
$d(I;AC)=y=\frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}$,

$d(I;AB)=z=\frac{2cS}{a^2+b^2+c^2}$.

2. Nói riêng nếu ABC là tam giác vuông tại A. Khi đó ta có:

$S=\frac{1}{2}ah_a$,

$b^2+c^2=a^2$.



Do đó: $d(I;BC)=x=\frac{2a.\frac{1}{2}ah_a}{2a^2}$

$\Rightarrow d(I;BC)=\frac{h_a}{2}$.

Vậy điểm Lơ-moan I của tam giác vuông ABC tại A chính là trung điểm của đường cao AH.

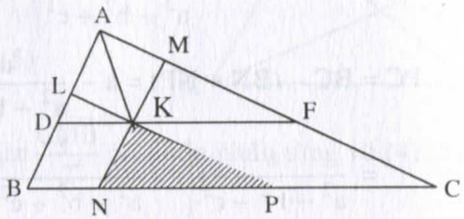
Bài 36. Các đường thẳng đi qua điểm Lơ-moan và song song với các cạnh của tam giác gọi là các đường song song Lơ-moan. Chứng minh rằng:

1. Các đoạn thẳng nằm trên các cạnh của tam giác và kẹp giữa các đường song song Lơ-moan thì tỉ lệ với lập phương các cạnh tương ứng.
2. Các đường song song Lơ-moan cắt mỗi cạnh của tam giác thành ba đoạn thẳng tỉ lệ với bình phương các cạnh của tam giác.

Giải

Giả sử trong tam giác ABC, K là điểm Lơ-moan còn NM, LP, DF là các đường song song Lơ-moan (như vậy NM, LP, DF đồng qui tại K)

1. Ta phải chứng minh $NP:MF:LD=a^3:b^3:c^3$.



Gọi khoảng cách từ điểm K đến ba cạnh BC, AC, AB lần lượt là d_a, d_b, d_c. Theo bài 35 (phần chú ý), ta có:

$d_a=\frac{a^2h_a}{a^2+b^2+c^2}$; $d_b=\frac{b^2h_b}{a^2+b^2+c^2}$

$d_c=\frac{c^2h_c}{a^2+b^2+c^2}$ (chú ý rằng $2S=ah_a=bh_b=ch_c$).

Do $\Delta KNP\backsim\Delta ABC$, nên $\frac{NP}{BC}=\frac{d_a}{h_a}$

$\Rightarrow NP=\frac{d_a.BC}{h_a}=\frac{ad_a}{h_a}=\frac{a^3h_a}{h_a(a^2+b^2+c^2)}=\frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}$.

Tương tự ta có: $MF=\frac{b^3}{a^2+b^2+c^2}$; $LD=\frac{c^3}{a^2+b^2+c^2}$.

Vì thế đi đến $NP:MF:LD=a^3:b^3:c^3\Rightarrow$ đpcm.

2. Ta phải chứng minh $BN:NP:PC=c^2:a^2:b^2$.

Do DF // BC nên AK cũng là đường đối trung đối với tam giác ADF.

Theo bài 29, ta có: $\frac{DK}{KF}=\frac{AD^2}{AF^2}$. (1)

Lại theo định lí Talet, thì $\frac{AD}{AF}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$, nên thay vào (1) ta có:

$\frac{DK}{KF}=\frac{c^2}{b^2}\Rightarrow\frac{DK}{KF+DK}=\frac{c^2}{b^2+c^2}\Rightarrow\frac{DK}{DF}=\frac{c^2}{b^2+c^2}$.

Từ đó $DK(=BN)=\frac{c^2.DF}{b^2+c^2}$. (2)

Theo định lí Talet, ta có:

$$\frac{DF}{BC}=\frac{h_a-d_a}{h_a}=1-\frac{d_a}{h_a}=1-\frac{\frac{2Sa}{a^2+b^2+c^2}}{\frac{2S}{a}}=1-\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Từ đó $\quad DF=\dfrac{a(b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}$. (3)

Thay (3) vào (2) và có: $BN=\dfrac{ac^2}{a^2+b^2+c^2}$. (4)

Mặt khác vì $NP=\dfrac{a^3}{a^2+b^2+c^2}$, do đó từ (4) suy ra:

$$PC=BC-(BN+NP)=a-\frac{ac^2}{a^2+b^2+c^2}-\frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2+c^2}\left(1-\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}-\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\right)=\frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2}. \quad (5)$$

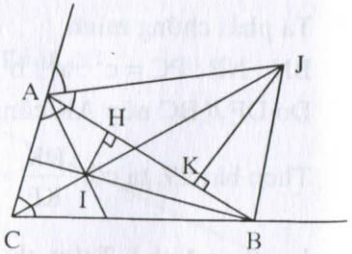
Từ (5) đi đến

$$BN:NP:PC=\frac{ac^2}{a^2+b^2+c^2}:\frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}:\frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$=c^2:a^2:b^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 37. Cho tam giác ABC và M là một điểm trên cạnh AB. Gọi r_1, r_2, r tương ứng là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác AMC, BMC, ABC. Gọi p_1, p_2, p lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp đối với góc đỉnh C của các tam giác nói trên. Chứng minh $\dfrac{r_1r_2}{p_1p_2}=\dfrac{r}{p}$.

Giải



Gọi I và J tương ứng là tâm các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc C của tam giác ABC

Kẻ IH ⊥ AB và JK ⊥ AB.

Khi đó IH = r; JK = p.

Ta có: AB = AH + HB

$$=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)=r\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=r\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}. \quad (1)$$

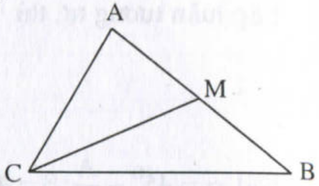
Ta lại có $\quad AB=AK+KB=p\left(\cot\widehat{KAJ}+\cot\widehat{KBJ}\right).$

Vì $\widehat{KAJ}=90^0-\dfrac{A}{2};\ \widehat{KBJ}=90^0-\dfrac{B}{2}$, nên suy ra

$$AB=p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=p\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=p\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) đi đến $\quad \dfrac{r}{p}=\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$. (3)

Áp dụng (3) vào các tam giác ACM và BMC, ta có:



$$\frac{r_1}{p_1}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{\widehat{AMC}}{2}, \quad (4)$$

$$\frac{r_2}{p_2}=\tan\frac{\widehat{CMB}}{2}\tan\frac{B}{2}. \quad (5)$$

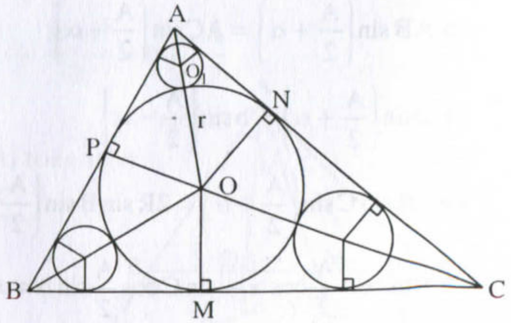
Vì $\dfrac{\widehat{AMC}}{2}+\dfrac{\widehat{CMB}}{2}=90^0 \Rightarrow \tan\dfrac{\widehat{AMC}}{2}\tan\dfrac{\widehat{CMB}}{2}=1$, nên nhân từng vế (4) (5) sẽ có: $\dfrac{r_1r_2}{p_1p_2}=\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$ (6)

Từ (3) (6) suy ra $\quad \dfrac{r}{p}=\dfrac{r_1r_2}{p_1p_2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 38. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm O, bán kính r. Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, AC, AB với đường tròn. Vẽ ba đường tròn nội tiếp ba tam giác cong ANP, BMP, CMN (đường tròn nội tiếp tam giác cong ANP tức là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh AP, AN và tiếp xúc với cung $\overset{\frown}{NP}$). Gọi r_1, r_2, r_3 tương ứng là các bán kính của các đường tròn ấy. Chứng minh: $\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}=\sqrt{r}$.

Giải

Gọi O và O_1 tương ứng là tâm các đường tròn nội tiếp ΔABC và tam giác cong ANP. Ta có:



$$OO_1=r+r_1=AO-AO_1$$

$$=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{r-r_1}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Từ đó ta có: $(r+r_1)\sin\dfrac{A}{2}=r-r_1$

$$\Rightarrow r_1\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)=r\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow r_1 = r\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}} = r\frac{1-\cos\left(90^0-\frac{A}{2}\right)}{1+\cos\left(90^0-\frac{A}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow r_1 = r\frac{2\sin^2\left(45^0-\frac{A}{4}\right)}{2\cos^2\left(45^0-\frac{A}{4}\right)} = r\tan^2\left(45^0-\frac{A}{4}\right). \quad (1)$$

Lập luận tương tự, thì $r_2 = r\tan^2\left(45^0-\frac{B}{4}\right)$, (2)

$$r_3 = r\tan^2\left(45^0-\frac{C}{4}\right). \quad (3)$$

Đặt $\alpha = 45^0-\frac{A}{4}; \beta = 45^0-\frac{B}{4}; \gamma = 45^0-\frac{C}{4}$.

Khi đó $\alpha+\beta+\gamma = 135^0 - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4} = 90^0$

$\Rightarrow \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1.$ (4)

Từ (1) (2) (3) ta có:

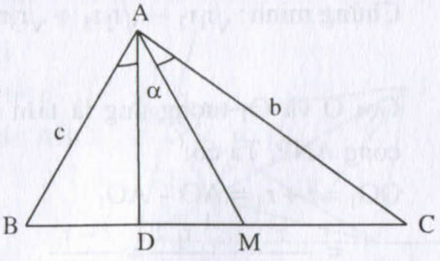
$\sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1} = r(\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha)$ (5)

Từ (4) (5) suy ra đpcm.

Bài 39. Cho tam giác ABC có B > C. Gọi AD, AM tương ứng là phân giác và trung tuyến kẻ từ A. Đặt $\widehat{MAD} = \alpha$.

Chứng minh: $\tan^2\frac{A}{\alpha} = \tan\alpha.\cot\frac{B-C}{2}$.

Giải



Vì $MB = MC \Rightarrow S_{ABM} = S_{AMC}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB.AM\sin\widehat{BAM} = \frac{1}{2}AM.AC\sin\widehat{MAC}$

$\Rightarrow AB\sin\left(\frac{A}{2}+\alpha\right) = AC\sin\left(\frac{A}{2}-\alpha\right)$

$\Rightarrow c\sin\left(\frac{A}{2}+\alpha\right) = b\sin\left(\frac{A}{2}-\alpha\right)$

$\Rightarrow 2R\sin C\sin\left(\frac{A}{2}+\alpha\right) = 2R\sin B\sin\left(\frac{A}{2}-\alpha\right)$

$\Rightarrow \sin C\sin\frac{A}{2}\cos\alpha + \sin C\cos\frac{A}{2}\sin\alpha = \sin B\sin\frac{A}{2}\cos\alpha - \sin B\cos\frac{A}{2}\sin\alpha$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}\sin\alpha(\sin B + \sin C) = \sin\frac{A}{2}\cos\alpha(\sin B - \sin C)$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}\sin\alpha.2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\alpha.2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}\sin\alpha\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\alpha\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$

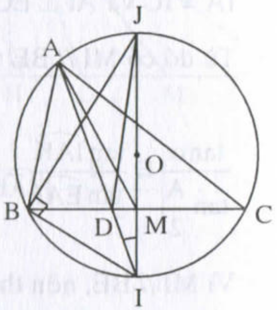
$\Rightarrow \sin\alpha\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \cos\alpha\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$. (1)

Chia cả hai vế của (1) cho $\cos^2\frac{A}{2}\cos\alpha\sin\frac{B-C}{2}$, ta có:

$\tan\alpha\cot\frac{B-C}{2} = \tan^2\frac{A}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Chú ý:

1. Xét cách giải khác sau đây:



Phân giác AD cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại I.

Ta có O, M, I thẳng hàng và $OM \perp BC$.

IO kéo dài cắt đường tròn trên tại J.

Vì $\widehat{IAJ} = 90^0$, nên DAJM là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{DJM} = \alpha$.

Dễ thấy $\widehat{DIM} = \frac{B-C}{2}$. Từ đó suy ra:

$$\tan\alpha\cot\frac{B-C}{2} = \tan\widehat{DJM}.\cot\widehat{DIM} = \frac{DM}{MJ}.\frac{MI}{DM} = \frac{MI}{MJ}$$

$$= \frac{MI.IJ}{MJ.IJ}. \quad (1)$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABI, ta có:

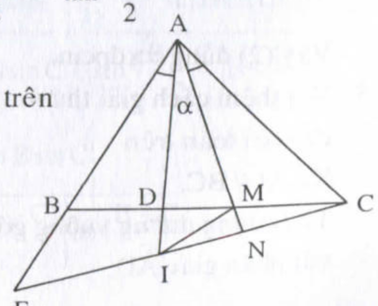
$MI.IJ = BI^2; MI.IJ = BJ^2$ (2)

Thay (2) vào (1) và có: $\tan\alpha\cot\frac{B-C}{2} = \left(\frac{BI}{BJ}\right)^2 = \tan^2\widehat{BJI}$. (3)

Do $\widehat{BJI} = \widehat{BAI} = \frac{A}{2}$, nên từ (3) có: $\tan\alpha\cot\frac{B-C}{2} = \tan^2\frac{A}{2}$

$\Rightarrow$ đpcm.

2. Xét thêm một cách giải khác nữa của bài toán trên



Do $\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^0 \Rightarrow \tan\frac{A}{2} = \cot\frac{B+C}{2}$.

Vậy đưa đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau:

$$\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B+C}{2}=\tan\alpha\cot\frac{B-C}{2}\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}=\tan\alpha\tan\frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tan\alpha}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}.\qquad(1)$$

Áp dụng định lí hàm số tang, ta có: (1) $\Leftrightarrow\dfrac{\tan\alpha}{\tan\frac{A}{2}}=\dfrac{b-c}{b+c}$. (2)

Do $B > C \Rightarrow AC > AB$. Kéo dài AB một đoạn BE sao cho $BE = b - c$

$\Rightarrow AE = AC$.

AD kéo dài cắt CE tại I

Vì EAC là tam giác cân đỉnh A, mà AI là phân giác góc A nên ta có:

$IA = IC$ và $AI \perp EC$.

Từ đó có MI // BE và $MI = \dfrac{BE}{2}$ (đường trung bình trong ΔBCE). Ta có:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{\tan\widehat{IAK}}{\tan\widehat{EAI}}=\frac{\frac{IK}{AI}}{\frac{EI}{AI}}=\frac{IK}{IE}.\qquad(3)$$

Vì MI // BE, nên theo định lí Talet thì: $\dfrac{IK}{KE}=\dfrac{MI}{AE}\Rightarrow\dfrac{IK}{KE-IK}=\dfrac{MI}{AE-MI}$

$$\Rightarrow\frac{IK}{IE}=\frac{\frac{BE}{2}}{AE-\frac{BF}{2}}.\qquad(4)$$

Ta có: $BE = AE - AB = b - c$

$$AE-\frac{BE}{2}=b-\frac{b-c}{2}=\frac{b+c}{2}.\quad(5)$$

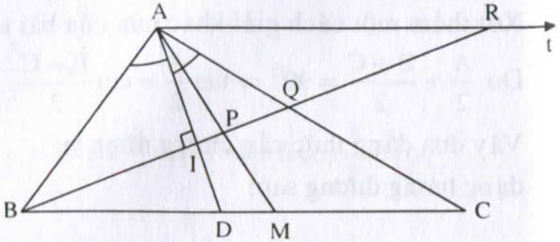
Thay (4) (5) vào (3) và có: $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\frac{A}{2}}=\dfrac{\frac{b-c}{2}}{\frac{b+c}{2}}=\dfrac{b-c}{b+c}$.

Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

3. Xét thêm cách giải thứ 4 cho bài toán trên

Kẻ At // BC.

Từ B dựng đường vuông góc với phân giác AD.



Đường này lần lượt cắt AD, AM, AC, At tại I, P, Q, R

Khi đó B, P, Q, R lập thành một hàng điểm điều hòa

Vì I là trung điểm của BQ, nên theo hệ thức Newton ta có:

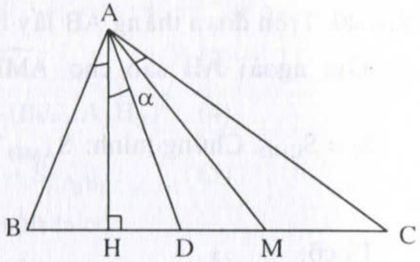
$$IB^2 = IP.IR \Leftrightarrow\left(\frac{IB}{IA}\right)^2=\frac{IP}{IA}.\frac{IR}{IA}$$

$$\Leftrightarrow\tan^2\widehat{BAI}=\tan\alpha.\cot\widehat{ARI}$$

$$\Leftrightarrow\tan^2\frac{A}{2}=\tan\alpha.\cot\frac{B-C}{2}\Rightarrow\text{đpcm.}$$

4. Sau đây là cách giải thứ 5 cho bài toán

Kẻ $AH \perp BC$



Ta có: $\widehat{ADB}=C+\dfrac{A}{2}=C+\dfrac{180^0-B-C}{2}$

$$=90^0-\frac{B-C}{2}.$$

Từ đó $\widehat{HAD}=\dfrac{B-C}{2}$.

Ta có: $\tan\alpha=\tan\widehat{DAM}=\tan\left(\widehat{HAM}-\widehat{HAD}\right)=\tan\left(\widehat{HAM}-\dfrac{B-C}{2}\right)$

$$=\frac{\tan\widehat{HAM}-\tan\frac{B-C}{2}}{1+\tan\widehat{HAM}\tan\frac{B-C}{2}}.$$

Lại có: $\tan\widehat{HAM}=\dfrac{HM}{AH}=\dfrac{MB-BH}{AH}=\dfrac{2MB-2BH}{2AH}$

$$=\frac{(BC-BH)-BH}{2AH}=\frac{HC-BH}{2AH}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{HC}{AH}-\frac{HB}{AH}\right)=\frac{1}{2}(\cot C-\cot B)=\frac{1}{2}\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}.$$

Từ đó suy ra:

$$\tan\alpha=\frac{\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}-\tan\frac{B-C}{2}}{1+\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}\tan\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}-\sin B\sin C\sin\frac{B-C}{2}}{\left(\sin B\sin C+\sin^2\frac{B-C}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}\left[\frac{1+\cos(B-C)}{2}-\sin B\sin C\right]}{\left[\frac{\cos(B-C)-\cos(B+C)}{2}+\frac{1-\cos(B-C)}{2}\right]\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \frac{\tan\frac{B-C}{2}\left[\frac{1+\cos(B-C)}{2} - \frac{\cos(B-C)-\cos(B+C)}{2}\right]}{\frac{1-\cos(B+C)}{2}}$$

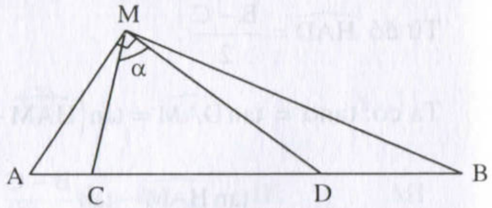
$$= \tan\frac{B-C}{2}.\frac{2\cos^2\frac{B+C}{2}}{2\sin^2\frac{B+C}{2}} = \tan\frac{B-C}{2}.\cot^2\frac{B+C}{2}$$

$$= \tan\frac{B-C}{2}\tan^2\frac{A}{2} \Rightarrow \tan^2\frac{A}{2} = \tan\alpha\cot\frac{B-C}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 40. Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm C, D sao cho $C \in AD$. M là một điểm nằm ngoài AB sao cho $\widehat{AMD} = \widehat{CMB} = 90^0$. Đặt $\widehat{CMD} = \alpha$, $S_1 = S_{AMD}$; $S_2 = S_{CMD}$. Chứng minh: $S_{AMD} = \dfrac{S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1+S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$.

Giải

Ta có:



$\widehat{AMB} = \widehat{CMB} + \widehat{AMC}$

$= 90^0 - (90^0 - \alpha) = 180^0 - \alpha$

$\Rightarrow \sin\widehat{AMB} = \sin\alpha$.

Đặt $x = S_{MAB}$, $y = S_{MCD}$ thì $x > y$

Ta có: $x + y = S_{AMD} + S_{CMD} = S_1 + S_2$, (1)

$$xy = \left(\frac{1}{2}MC.MD\sin\widehat{CMD}\right)\left(\frac{1}{2}MA.MB\sin\widehat{MAB}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}MA.MD\right)\left(\frac{1}{2}MC.MB\right)\sin^2\alpha$$

$$= S_1S_2\sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) và theo định lí Viet suy ra x và y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - (S_1+S_2)t + S_1S_2\sin^2\alpha = 0$. (3)

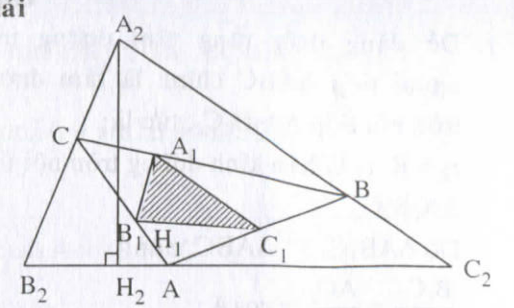
Do $x > y$ nên từ (3) suy ra $S_{MAB} = x = \dfrac{S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1+S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$.

Đó là đpcm.

Bài 41. (Bài toán Peletier)

Cho tam giác $A_2B_2C_2$. Lấy ba điểm A, B, C tương ứng nằm trong các cạnh B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2. Lại lấy ba điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trong các cạnh BC, CA, AB sao cho $A_1B_1 // A_2B_2$, $B_1C_1 // B_2C_2$ và $C_2A_2 // C_1A_1$. Chứng minh: $S^2_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_2}$.

Giải



Do $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$ nên ta có:

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1H_1}{A_2H_2} \qquad (1),$$

ở đây A_1H_1 và A_2H_2 tương ứng là các chiều cao kẻ từ A_1, A_2 của các $\Delta A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

Ta có:

$$S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{4}(B_1C_1.A_1H_1)(B_2C_2.A_2H_2). \qquad (2)$$

Từ (1) có: $A_1H_1.B_2C_2 = A_2H_2.B_1C_1$. (3)

Thay (3) vào (2) và có: $S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{4}(B_1C_1.A_2H_2)^2$. (4)

Ta lại có: $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} + S_{AB_1C_1} + S_{BC_1A_1} + S_{CA_1B_1}$. (5)

Do $B_1C_1 // B_2C_2$; $C_1A_1 // C_2A_2$; $A_1B_1 // A_2B_2$ nên ta có:

$S_{AB_1C_1} = S_{C_2B_1C_1}$; $S_{BC_1A_1} = S_{A_2C_1A_1}$; $S_{CA_1B_1} = S_{A_2A_1B_1}$. (6)

Lại có $S_{A_2B_1C_1} = S_{A_2B_1C_1} + S_{A_2B_1A_1} + S_{A_1B_1C_1}$. (7)

Kết hợp (5) (6) (7) suy ra $S_{ABC} = S_{C_2B_1C_1} + S_{A_2B_1C_1} = \frac{1}{2}B_1C_1(d + d')$,

trong đó d, d’ tương ứng là khoảng cách từ C_2 đến B_1C_1 và A_2 đến B_1C_1.

Dễ thấy $d + d' = A_2H_2$.

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}B_1C_1.A_2H_2 \Rightarrow S^2_{ABC} = \frac{1}{4}(B_1C_1.A_2H_2)^2$.

Vậy (4) đúng ⇒ đpcm.

Chú ý: Người ta thường dùng khái niệm ΔABC là nội tiếp $\Delta A_2B_2C_2$ và ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ nếu như thỏa mãn điều kiện $A_1B_1 // A_2B_2$, $B_1C_1 // B_2C_2$, $C_1A_1 // C_2A_2$.

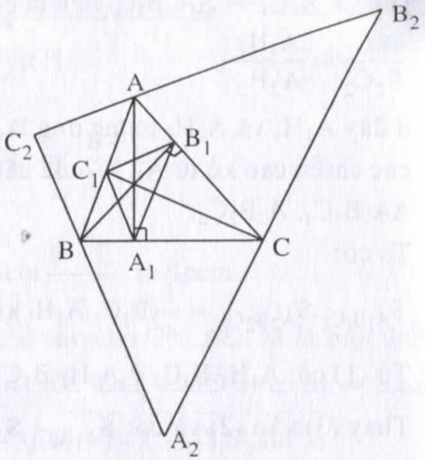
Bài 42. Cho ABC là tam giác có ba góc nhọn với ba chiều cao là AA_1, BB_1, CC_1. Qua A, B, C lần lượt vẽ ba đường song song với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chúng cắt nhau tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$. Gọi r_1, R_2, p_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta A_1B_1C_1$, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nửa chu vi $\Delta A_2B_2C_2$. Chứng minh:

1. $r_1 = 2R\cos A\cos B\cos C$.
2. $R_2 = \dfrac{R}{4\cos A\cos B\cos C}$.
3. $p_2 = R\tan A\tan B\tan C$.

Giải

1. Dễ dàng thấy rằng tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC chính là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A_2B_2C_2$, tức là:

$r_2 = R$, r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta A_2B_2C_2$.



Do $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta ABC$, nên

$\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{AC_1}{AC} = \cos A$

$\Rightarrow B_1C_1 = BC\cos A = a\cos A$.

Lập luận tương tự có:

$A_1B_1 = AB\cos C = c\cos C$,

$A_1C_1 = b\cos B$.

Ta có: $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}A_1B_1.A_1C_1 \sin\widehat{B_1A_1C_1} = \dfrac{1}{2}(c\cos C)(b\cos B)\sin(180^0 - 2A)$

(do $\widehat{B_1A_1C} = \widehat{B_1A_1A} + \widehat{C_1A_1A} = \widehat{C_1CA} + \widehat{ABB_1}$

$= 90^0 - A + 90^0 - A = 180^0 - 2A$)

$= \dfrac{1}{2}bc\sin 2A\cos B\cos C = bc\sin A\cos A\cos B\cos C = 2S\cos A\cos B\cos C.$

Theo bài toán Peletier (xem bài 41), ta có:

$S^2 = S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_2}$, và theo (1) đi đến $S^2 = 2S\cos A\cos B\cos C.\,S_{A_2B_2C_2}\,S.$

Từ đó suy ra $S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{S}{2\cos A\cos B\cos C}$.

Do $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$, nên

$\dfrac{r_1}{r_2} = \sqrt{\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}}} = \sqrt{\dfrac{2S\cos A\cos B\cos C.2\cos A\cos B\cos C}{S}} = 2\cos A\cos B\cos C.$

Kết hợp với $r_2 = R$, đi đến $r_1 = 2R\cos A\cos B\cos C \Rightarrow$ đpcm.

2. Áp dụng định lí hàm số sin trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$R_1 = \dfrac{B_1C_1}{2\sin A_1}$, ở đây R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$.

Từ đó ta có: $R_1 = \dfrac{a\cos A}{2\sin(180^0 - 2A)} = \dfrac{a\cos A}{2\sin 2A} = \dfrac{a}{4\sin A} = \dfrac{2R\sin A}{4\sin A} = \dfrac{R}{2}$.

Vì $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$ nên có: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = 2\cos A\cos B\cos C$

$\Rightarrow R_2 = \dfrac{R_1}{2\cos A\cos B\cos C} = \dfrac{R}{4\cos A\cos B\cos C} \Rightarrow$ đpcm.

3. Ta có:

$p_1 = \dfrac{1}{2}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)$, ở đây p_1 là nửa chu vi của $\Delta A_1B_1C_1$. Từ đó

$p_1 = \dfrac{1}{2}(c\cos C + a\cos A + b\cos B) = \dfrac{1}{2}R\,(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

$= 2R\sin A\sin B\sin C$.

Vì $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$ nên $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = 2\cos A\cos B\cos C$

$\Rightarrow p_2 = \dfrac{p_1}{2\cos A\cos B\cos C} = \dfrac{2R\sin A\sin B\sin C}{2\cos A\cos B\cos C}$

$= R\tan A\tan B\tan C \Rightarrow$ đpcm.

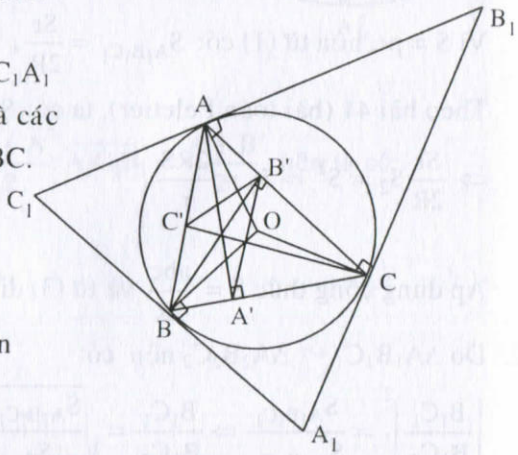
Bài 43. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với ba chiều cao là AA', BB', CC'. Gọi $A_1B_1C_1$ là tam giác tạo thành bởi ba tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại A, B, C. Chứng minh rằng: $S^2_{ABC} = S_{A'B'C'}.S_{ABC}$.

Giải

Theo hình học lớp 9, ta có:

$A'B' \,//\, A_1B_1$; $B'C' \,//\, B_1C_1$; $C'A' \,//\, C_1A_1$

Vậy A'B'C' và $A_1B_1C_1$ tương ứng là các tam giác nội tiếp và ngoại tiếp ΔABC.



Theo bài 41 suy ra:

$S^2_{ABC} = S_{A'B'C'}.S_{A_1B_1C_1} \Rightarrow$ đpcm.

Chú ý: Nếu ABC là tam giác nhọn, thì A'B'C' gọi là tam giác trực tâm, còn $A_1B_1C_1$ gọi là tam giác tiếp xúc

Từ bài 43 suy ra kết quả sau:

Diện tích tam giác ABC là trung bình nhân của diện tích tam giác trực tâm và diện tích tam giác tiếp xúc của nó.

Bài 44. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp của tam giác tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA lần lượt tại C_1, A_1, B_1. Qua A, B, C theo thứ tự lần lượt kẻ các đường thẳng song song với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; chúng cắt nhau và tạo thành $\Delta A_2B_2C_2$.

Gọi S_2, R_2 tương ứng là diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_2B_2C_2$.

Chứng minh: $S_2 = \dfrac{abc}{2r}$; $R_2 = 2R$.

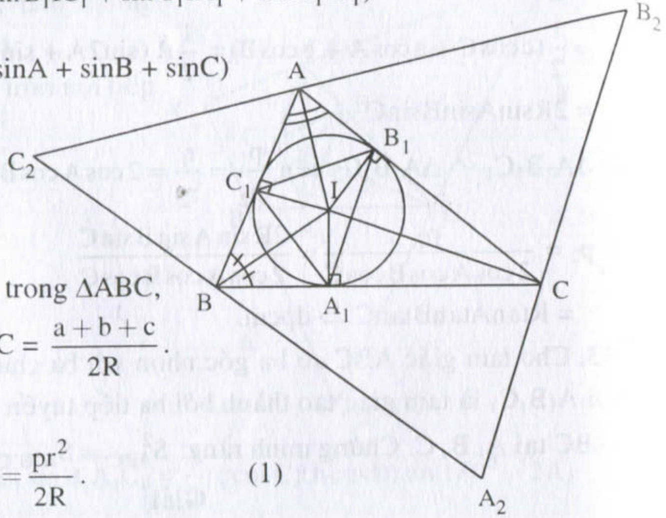
Giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

Ta có: $S_{A_1B_1C_1} = S_{IB_1C_1} + S_{IC_1A_1} + S_{IA_1B_1}$

$$= \frac{1}{2}r^2(\sin\widehat{B_1IC_1} + \sin\widehat{C_1IA_1} + \sin\widehat{A_1IB_1})$$

$$= \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$$



(do $\widehat{B_1IC_1} + A = 180^0$;

$\widehat{A_1IB_1} + C = 180^0$;

$\widehat{C_1IA_1} + B = 180^0$).

Theo định lí hàm số sin trong ΔABC,

ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{a+b+c}{2R}$.

Từ đó ta có:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}r^2\frac{a+b+c}{2R} = \frac{pr^2}{2R}. \qquad (1)$$

Vì S = pr, nên từ (1) có: $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{Sr}{2R}$. (2)

Theo bài 41 (bài toán Peletier), ta có: $S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_2} = S^2$

$$\Rightarrow \frac{Sr}{2R}S_2 = S^2 \Rightarrow S_2 = \frac{2RS}{r}. \qquad (3)$$

Áp dụng công thức $S = \dfrac{abc}{4R}$ và từ (3) đi đến: $S_2 = \dfrac{2R.\frac{abc}{4R}}{r} = \dfrac{abc}{2r} \Rightarrow$ đpcm.

2. Do $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$ nên có:

$$\left(\frac{B_1C_1}{B_2C_2}\right)^2 = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}} \Rightarrow \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \sqrt{\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_2}}$$

Áp dụng phần 1/ suy ra: $\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \sqrt{\dfrac{\frac{Sr}{2R}}{\frac{abc}{2r}}} = \sqrt{\dfrac{Sr.2r}{2R.abc}} = \sqrt{\dfrac{\frac{abc}{4R}.2r^2}{2R.abc}}$

$$= \frac{r}{2R}. \qquad (4)$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ là r, và do $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$

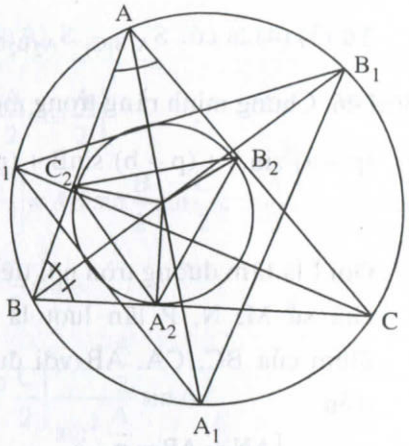
nên ta có: $\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \dfrac{r}{R_2}$. (5)

Từ (4) (5) đi đến $R_2 = 2R \Rightarrow$ đpcm.

Bài 45. Cho tam giác ABC. Đường phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại A_1, B_1, C_1. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với ba cạnh BC, AC, AB tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh:

$$S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_2} = \frac{S^2}{4}.$$

Giải



Chú ý rằng bán kính r đường tròn nội tiếp ΔABC chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_2B_2C_2$.

Ta lại có R cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$. Áp dụng định lý hàm số sin trong $\Delta A_1B_1C_1$ (với chú ý trên) ta có:

$$A_1B_1 = 2R\sin\widehat{A_1C_1B_1},$$

$$B_1C_1 = 2R\sin\widehat{C_1A_1B_1},$$

$$C_1A_1 = 2R\sin\widehat{C_1B_1A_1}.$$

Vì $\widehat{C_1A_1B_1} = \dfrac{B+C}{2}$; $\widehat{C_1B_1A_1} = \dfrac{C+A}{2}$; $\widehat{A_1C_1B_1} = \dfrac{A+B}{2}$, nên ta có:

$$A_1B_1 = 2R\sin\frac{B+C}{2} = 2R\cos\frac{A}{2},$$

$$B_1C_1 = 2R\sin\frac{C+A}{2} = 2R\cos\frac{B}{2},$$

$$C_1A_1 = 2R\sin\frac{A+B}{2} = 2R\cos\frac{C}{2}.$$

Ta có: $S_{A_1B_1C_1} = 2R^2\sin\widehat{C_1A_1B_1}\sin\widehat{C_1B_1A_1}\sin\widehat{A_1C_1B_1}$

$$= 2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Lại có: $S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$ (xem các bài trên)

$$= \frac{1}{2}r^2.4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra: $S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_1} = 4R^2r^2\cos^2\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{B}{2}\cos^2\dfrac{C}{2}$. (2)

Do $r = 4R.\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$, nên từ (2) đi đến

$$S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_2} = 64R^4.\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}$$
$$= R^4\sin^2A\sin^2B\sin^2C. \qquad (3)$$

Lại có $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

$$\Rightarrow S^2 = 4R^4\sin^2A\sin^2B\sin^2C. \qquad (4)$$

Từ (3) (4) ta có: $S_{A_1B_1C_1}.S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{S^2}{4} \Rightarrow$ đpcm.

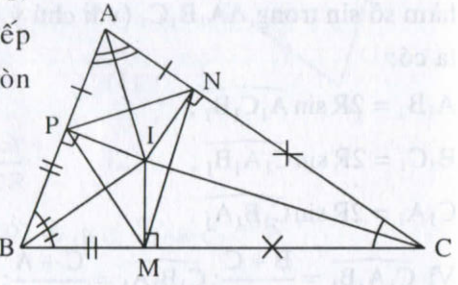
Bài 46. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$(p-a)^2\sin A + (p-b)^2\sin B + (p-c)^2\sin C = 4r(2R - r)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giả sử M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn trên



Ta có: $\begin{cases} AN = AP = p - a \\ BM - BP = p - b \\ CM = CN = p - c. \end{cases}$

Từ đó suy ra:

$$(p-a)^2\sin A + (p-b)^2\sin B + (p-c)^2\sin C = 2(S_{APN} + S_{BMN} + S_{CMN})$$
$$= 2(S - S_{MNP}). \qquad (1)$$

Ta có theo các bài trên: $S_{MNP} = \dfrac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Thay vào (1) và có:

$$(p-a)^2\sin A + (p-b)^2\sin B + (p-c)^2\sin C = 2S - r^2(\sin A + \sin B + \sin C) \quad (2)$$

Mặt khác ta có:

$$4r(2R-r)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = r.2R.4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - r^2.4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$= r.2R(\sin A + \sin B + \sin C) - r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$

(do $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$)

$$= r(a + b + c) - r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$$
$$= 2pr - r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$$
$$= 2S - r^2(\sin A + \sin B + \sin C) \qquad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra đpcm.

Nhận xét:

1. Cách giải trên là sử dụng lượng giác và kết hợp hình học phẳng để giải vì thế lời giải là gọn gàng. Chú ý hình vẽ trong bài toán trên đúng với mọi dạng của tam giác ABC.
2. Xét cách giải "thuần túy lượng giác" bài toán trên.

Ta có: $p - a = \dfrac{b + c - a}{2} = R(\sin B + \sin C - \sin A)$

$$= R\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$= 2R\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Từ đó: $(p-a)^2\sin A = 16R^2\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}\cos^2\dfrac{A}{2}\sin A$

$$= \left(16R^2\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right)\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\sin A.$$

Áp dụng công thức $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$, ta có:

$$(p-a)^2\sin A = r^2\cot^2\frac{A}{2}\sin A = r^2\sin A\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} - 1\right)$$

$$= r^2\frac{\sin A}{\sin^2\frac{A}{2}} - r^2\sin A = r^2\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} - r^2\sin A$$

$$= 2r^2\cot\frac{A}{2} - r^2\sin A. \qquad (4)$$

Lại sử dụng công thức $r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} \Rightarrow \cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{p-a}{r}$. (5)

Thay (5) vào (4) và có: $(p-a)^2\sin A = 2r(p-a) - r^2\sin A$. (6)

Tương tự có: $(p-b)^2\sin B = 2r(p-b) - r^2\sin B$, (7)

$(p-c)^2\sin C = 2r(p-c) - r^2\sin C$. (8)

Cộng từng vế (6) (7) (8) đi đến:

$$(p-a)^2\sin A + (p-b)^2\sin B + (p-c)^2\sin C$$
$$= 2r(3p - a - b - c) - r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$$
$$= 2pr - r^2(\sin A + \sin B + \sin C). \qquad (9)$$

Lại sử dụng công thức:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Thay lại vào (9) và có:

$$(p-a)^2\sin A + (p-b)^2\sin B + (p-c)^2\sin C$$

$$= 8Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 4r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4r(2R-r)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Đó là đpcm.

Rõ ràng phương pháp "thuần túy lượng giác" là kém hiệu quả khi giải bài toán trên.

3. Bây giờ xét bài toán sau:

Chứng minh trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$S = \frac{1}{4}(b^2\sin 2C + c^2\sin 2B).$$

+ Xét cách giải thuần túy lượng giác sau đây:

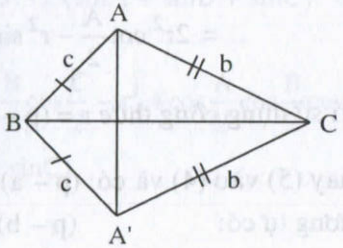
Ta có: $VP = \frac{1}{4}.4R^2(\sin^2 B\sin 2C + \sin^2 C\sin 2B)$

$$= 2R^2(\sin^2 B\sin C\cos C + \sin^2 C\sin B\cos B)$$
$$= 2R^2\sin B\sin C(\sin B\cos C + \sin C\cos B)$$
$$= 2R^2\sin B\sin C\sin(B+C)$$
$$= 2R^2\sin B\sin C\sin A = S \Rightarrow \text{đpcm}.$$

+ Xét cách giải kết hợp hình học phẳng sau:

1. Nếu B, C đều nhọn. Khi đó không phụ thuộc góc A là góc gì, ta có hình vẽ sau (ở đây A' là đối xứng của A qua BC)

Ta có:

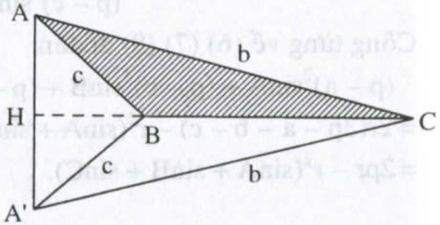


$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABA'C} = \frac{1}{2}(S_{ABA'} + S_{AA'C})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c^2\sin 2B + \frac{1}{2}b^2\sin 2C\right)$$

$$= \frac{1}{4}(c^2\sin 2B + b^2\sin 2C).$$

2. Nếu một trong hai góc B, C không nhọn. Giả sử góc đó là B. Khi đó ta có hình vẽ sau:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABA'C} = \frac{1}{2}(S_{ACA'} - S_{ABA'}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}b^2\sin 2C - \frac{1}{2}c^2\sin\widehat{ABA'}\right].$$

Do $\widehat{ABA'} = 360^0 - 2B \Rightarrow \sin\widehat{ABA'} = -\sin 2B$.

Từ đó $S_{ABC} = \frac{1}{4}(b^2\sin 2C + c^2\sin 2B)$.

Trong thí dụ này ta nên sử dụng phương pháp lượng giác thuần túy, còn nếu kết hợp với hình học phẳng thì phải xét hai trường hợp (chú ý thêm trường hợp 2 bao gồm cả khi $B = 90^0$ lúc này $B \equiv H$ và $S_{ABA'} = 0$).

Bình luận:

- Phương pháp kết hợp lượng giác với hình học phẳng thường cho ta lời giải gọn gàng trong sáng. Nó đạt được tính ưu việt ấy vì đã sử dụng được các yếu tố hình học trong đó. Tuy nhiên phương pháp này cũng bộc lộ một nhược điểm cơ bản so với phương pháp sử dụng thuần túy lượng giác ở khía cạnh sau đây.
- Phương pháp lượng giác không phụ thuộc vào yếu tố hình vẽ, do đó nói chung nó đúng trong mọi khả năng (vì các công thức lượng giác mà ta sử dụng nói chung nó không phụ thuộc vào hình dáng tam giác). Các phương pháp hình học thì phụ thuộc nhiều vào việc vẽ hình. Nó phụ thuộc vào các hình dáng của các hình đưa ra.

Bài 47. Cho tam giác ABC. Lấy A, B, C làm tâm dựng ba đường tròn đôi một tiếp xúc nhau. Giả sử R_a, R_b, R_c tương ứng là bán kính của các đường tròn này. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh:

$$\tan\widehat{BIC} = -\sqrt{\frac{R_a}{R_bR_c}(R_a + R_b + R_c)}.$$

Giải

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, nên ta có:

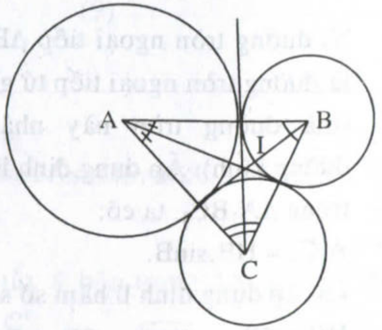
$$\widehat{BIC} = 180^0 - \frac{B+C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\widehat{BIC} = -\tan\frac{B+C}{2} = -\cot\frac{A}{2} \quad (1)$$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC,

thì $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $\tan\widehat{BIC} = \frac{-(p-a)}{r}$.(3)



Vì ba đường tròn tâm A, B, C đôi một tiếp xúc nhau nên dễ thấy các đường phân giác trong của các góc A, B, C sẽ là các tiếp tuyến chung của từng cặp đường tròn. Từ đó dễ thấy:

$R_a = p - a;\ R_b = p - b;\ R_c = p - c \quad (4)$

Từ (4) ta có: $r = \frac{S}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{\frac{R_aR_bR_c}{R_a+R_b+R_c}}$.

Thay (5) vào (3) và có:

$$\tan\widehat{BIC} = -\frac{R_a\sqrt{R_a+R_b+R_c}}{\sqrt{R_aR_bR_c}} = -\sqrt{\frac{R_a}{R_bR_c}}(R_a+R_b+R_c) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 48. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của A, B, C lên các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi H là trực tâm ΔABC.

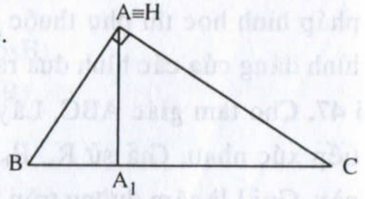
Đặt $\varepsilon(H) = \begin{cases} 1, \text{nếu } H \in \Delta ABC \\ -1, \text{nếu } H \notin \Delta ABC. \end{cases}$

Chứng minh: $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\varepsilon(H).R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C$.

Giải

Xét các trường hợp sau đây:

1. Nếu ABC là tam giác vuông (giả sử $A = 90^0$).



Khi đó $B_1 \equiv C_1 \equiv H \equiv A$.

Lúc này $\varepsilon(H) = 1$.

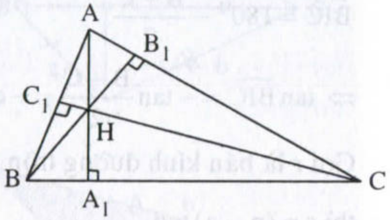
Tam giác $A_1B_1C_1$ biến thành đoạn thẳng A_1A do đó $S_{A_1B_1C_1} = 0$

Do $A = 90^0 \Rightarrow 2A = 180^0 \Rightarrow \sin 2A = 0$

Vậy công thức cần chứng minh đúng trong trường hợp đặc biệt này.

2. Nếu ABC là tam giác nhọn, khi đó H nằm hẳn bên trong $\Delta ABC \Rightarrow \varepsilon(H) = 1$

Ta có: $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1B_1.A_1C_1.\sin\widehat{C_1A_1B_1}$. (1)



Vì đường tròn ngoại tiếp ΔBA_1C_1 chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác BA_1HC_1 (mà đường tròn này nhận HB làm đường kính). Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔA_1BC_1, ta có:

$A_1C_1 = HB.\sin B$. (2)

Lại áp dụng định lí hàm số sin trong ΔHBC, ta có:

$HB = 2R.\sin\widehat{HCB} = 2R\cos B$. (3)

(với chú ý là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔHBC cũng chính là R)

Từ (2) (3) ta có: $A_1C_1 = 2R\cos B\sin B = R.\sin 2B$. (4)

Lập luận tương tự có: $A_1B_1 = R\sin 2C$ (5)

Ta lại có: $\widehat{C_1A_1B_1} = \widehat{C_1A_1H} + \widehat{HA_1B_1} = \widehat{ABB_1} + \widehat{C_1CA}$

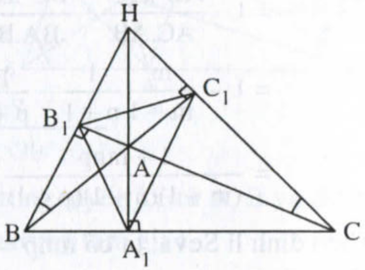
$= (90^0 - A) + (90^0 - 2A) = 180^0 - 2A$

$\Rightarrow \sin\widehat{C_1A_1B_1} = \sin 2A$.

Thay (4) (5) (6) vào (1) và có:

$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\varepsilon(H)R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C \Rightarrow$ đpcm.

3. Nếu ABC là tam giác có một góc tù (thí dụ $A > 90^0$)



Khi đó trực tâm của tam giác nhọn HBC chính là A. Để ý rằng vì H nằm ngoài ΔABC nên $\varepsilon(H) = -1$. Theo phần 2 với chú ý là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔHBC chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC (= R), nên ta có:

$S_{A_1B_1C_1} = \frac{R^2}{2}\sin(2\widehat{BHC})\sin(2\widehat{HBA_1})\sin(2\widehat{HCA_1})$ (7)

Ta có: $\widehat{HBA_1} = \widehat{ABC} + \widehat{HBC_1} = B + 90^0 - \widehat{BHC}$

$= B + 90^0 - (180^0 - A)$

(chú ý rằng $\widehat{BHC} + A = 180^0$)

$= A + B - 90^0$

$\Rightarrow 2\widehat{HBA_1} = 2(A+B) - 180^0$

$\Rightarrow \sin(2\widehat{HBA_1}) = -\sin[2(A+B)] = -\sin(360^0 - 2C)$

$= \sin 2C$ (8)

Lập luận tương tự có: $\sin(2\widehat{HCA_1}) = \sin 2B$. (9)

Ta có: $\sin(2\widehat{HBC}) = \sin(360^0 - 2A) = -\sin 2A$.

Thay (8) (9) (10) vào (7) và có:

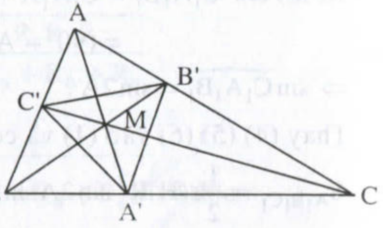
$S_{A_1B_1C_1} = -\frac{R^2}{2}\sin 2A\sin 2B\sin 2C = \frac{1}{2}\varepsilon(H)R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C$.

Đó là đpcm.

Bài 49. Cho tam giác ABC và M là một điểm tùy ý bên trong ΔABC. Giả sử AM ∩ BC = A', BM ∩ CA = B', CM ∩ AB = C'.

Giả sử $\frac{AB'}{B'C}=m;\ \frac{CA'}{A'B}=n;\ \frac{BC'}{C'A}=p.$

Chứng minh: $S_{A'B'C'}=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{(1+m)(1+n)(1+p)}$



Giải

Ta có:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S}=1-\frac{S_{AB'C'}}{S}-\frac{S_{BC'A'}}{S}-\frac{S_{CA'B'}}{S}\quad(1)$$

Áp dụng công thức:

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$, suy ra từ (1)

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S}=1-\frac{AB'.AC'}{AC.AB}-\frac{BC'.BA'}{BA.BC}-\frac{CA'.CB'}{CB.CA}$$

$$=1-\frac{m}{m+1}.\frac{1}{p+1}-\frac{p}{p+1}.\frac{1}{n+1}-\frac{n}{n+1}.\frac{1}{m+1}$$

$$=\frac{1+mnp}{(m+1)(n+1)(p+1)}.\quad(2)$$

Theo định lí Seva, ta có mnp = 1, từ đó suy ra:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S}=\frac{2}{(m+1)(n+1)(p+1)}\quad(3)$$

Do $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$, nên thay vào (3) suy ra:

$$S_{A'B'C'}=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{(1+m)(1+n)(1+p)}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Chú ý: Xét vài trường hợp đặc biệt của bài toán trên

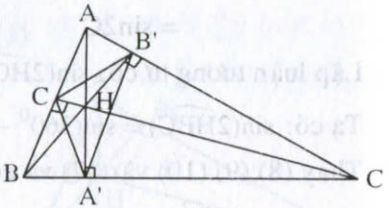
1. Nếu ABC là tam giác nhọn và AA', BB', CC' là ba chiều cao

   Khi đó A'B'C' là tam giác trực tâm

   Ta có: $m=\frac{AB'}{B'C}=\frac{c\cos A}{a\cos C}$;

   $$n=\frac{b\cos C}{c\cos B},\ p=\frac{a\cos B}{b\cos A}.$$

   Theo kết quả trên:



$$S_{A'B'C'}=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{\left(1+\frac{c\cos A}{a\cos C}\right)\left(1+\frac{b\cos C}{c\cos B}\right)\left(1+\frac{a\cos B}{b\cos A}\right)}$$

$$=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{\left(1+\frac{\sin C\cos A}{\sin A\cos C}\right)\left(1+\frac{\sin B\cos C}{\sin C\cos B}\right)\left(1+\frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}\right)}$$

$$=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C(\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C)}{\sin(A+C)\sin(B+C)\sin(A+B)}$$

$$=\frac{R^2}{2}\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$$

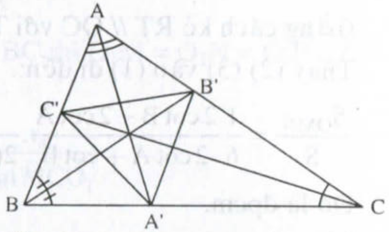
Ta thu lại kết quả trong bài trên

2. Nếu AA', BB', CC' là ba đường phân giác trong

   Khi đó: $m=\frac{AB'}{B'C}=\frac{c}{a};\ n=\frac{CA'}{A'B}=\frac{b}{c};\ p=\frac{BC'}{C'A}=\frac{a}{b}$

   (theo định lí ba đường phân giác trong).

   Theo kết quả trên, thì:



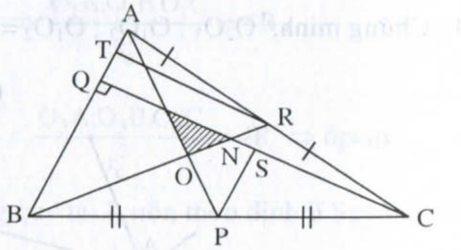
$$S_{A'B'C'}=\frac{4R^2.\sin A\sin B\sin C}{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(a+\frac{a}{b}\right)}$$

$$=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin Cabc}{(a+b)(c+a)(b+c)}=\frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Bài 50. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hai trung tuyến kẻ từ A, B và đường cao kẻ từ C cắt nhau tại ba điểm O, M, N bên trong tam giác.

Chứng minh: $S_{OMN}=\frac{(\cot B-\cot A)^2}{6(2\cot A+\cot B)(\cot A+2\cot B)}S.$

Giải



Giả sử hai trung tuyến AP, BQ và đường cao CQ cắt nhau tại O, M, N.

Vì O là trọng tâm ΔABC, nên ta có:

$S_{BOP}=\frac{1}{6}S.$

Ta có: $\frac{S_{OMN}}{S}=\frac{S_{OMN}}{6.S_{BOP}}$

$$=\frac{OM.ON}{6.OB.OP}.\quad(1)$$

Kẻ PS // AB (S ∈ QC). Theo định lí Talet, ta có:

$\frac{PM}{MA}=\frac{PS}{QA}=\frac{QB}{2QA}$ (do QB = 2PS)

$=\frac{QC.\cot B}{2QC\cot A}=\frac{\cot B}{2\cot A}$

$\Rightarrow \frac{PM}{MA+PM}=\frac{\cot B}{2\cot A+\cot B}\Rightarrow\frac{PM}{AP}=\frac{\cot B}{2\cot A+\cot B}$

$$\Rightarrow \frac{PM}{OP}=\frac{3\cot B}{2\cot A+\cot B}\left(\text{do } OP=\frac{1}{3}AP\right).$$

Vì $\frac{PM}{OP}-\frac{OM}{OP}=1 \Rightarrow \frac{OM}{OP}=\frac{3\cot B}{2\cot A+\cot B}-1$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OP}=\frac{2\cot B-2\cot A}{2\cot A+\cot B}. \quad (2)$$

Lập luận tương tự có: $\frac{ON}{OB}=\frac{\cot B-\cot A}{2(2\cot B+\cot A)}$ (3)

(bằng cách kẻ RT // QC với T ∈ AB)

Thay (2) (3) vào (1) đi đến:

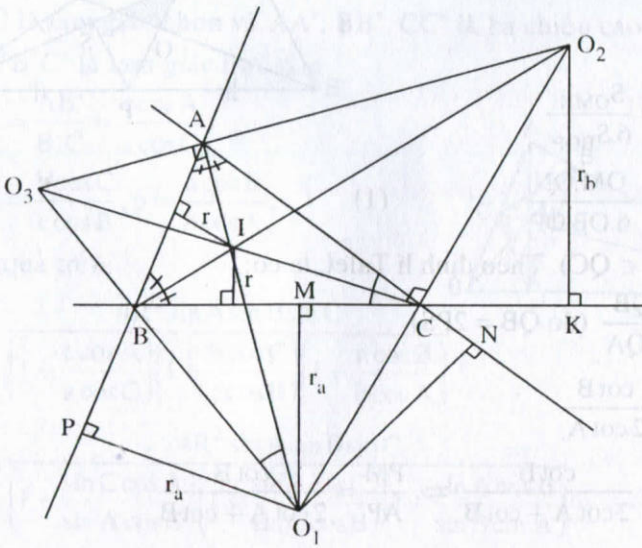
$$\frac{S_{OMN}}{S}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2\cot B-2\cot A}{2\cot A+\cot B}\cdot\frac{\cot B-\cot A}{2(2\cot B+\cot A)}=\frac{(\cot B-\cot A)^2}{6(2\cot A+\cot B)(2\cot B+\cot A)}$$

Đó là đpcm.

Bài 51. Cho tam giác ABC. Gọi O_1, O_2, O_3 tương ứng là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C và I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

1. Chứng minh: $\frac{O_1A.O_1B.O_1C}{r_a^2}=\frac{O_2A.O_2B.O_2C}{r_b^2}=\frac{O_3A.O_3B.O_3C}{r_c^2}=4R$.
2. Chứng minh: $\frac{IA}{O_1A}+\frac{IB}{O_2B}+\frac{IC}{O_3C}=1$.
3. Chứng minh: $IO_1.IO_2.IO_3=16R^2r$.
4. Chứng minh: $O_2O_3 : O_1O_3 : O_1O_2=\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$.

Giải



1. Dễ thấy O_3, A_2, O_2; O_3, B, O_1 và O_1, C, O_2 là ba cặp ba điểm thẳng hàng. Cũng thấy ngay O_1A, O_2B, O_3C là các đường cao của $\Delta O_1O_2O_3$ và đồng quy tại I (I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC).

Ta có: $r_a=p\tan\frac{A}{2}=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad (1)$$

(đã sử dụng công thức $p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$)

Kẻ $O_1M\perp BC$, $O_1N\perp AC$, $O_1P\perp AB$, $O_2K\perp BC$ thì $O_1M=O_1N=O_1P=r_a$, $O_2K=r_b$.

Ta có: $O_1A.O_1B.O_1C=\frac{r_a}{\sin\widehat{PAO_1}}\cdot\frac{r_a}{\sin\widehat{MBO_1}}\cdot\frac{r_a}{\sin\widehat{MCO_1}}$

$$=\frac{r_a^3}{\sin\frac{A}{2}\sin\left(90^0-\frac{B}{2}\right)\sin\left(90^0-\frac{C}{2}\right)}$$

$$=\frac{r_a^3}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}. \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) và có:

$$O_1A.O_1B.O_1C=r_a^2\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow\frac{O_1A.O_1B.O_1C}{r_a^2}=4R.$$

Lập luận tương tự, ta có: $\frac{O_2A.O_2B.O_2C}{r_b^2}=\frac{O_3A.O_3B.O_3C}{r_c^2}=4R\Rightarrow$ đpcm.

2. Trong $\Delta O_1O_2O_3$ thì O_1A, O_2B, O_3C đồng quy tại I, nên theo định lí Seva ta có:

$$\frac{IA}{O_1A}+\frac{IB}{O_1B}+\frac{IC}{O_1C}=1\Rightarrow \text{đpcm}.$$

3. Trong tam giác vuông IO_1B ta có: $IO_1=\frac{IB}{\sin\widehat{IO_1B}}$.

Ta có: $\widehat{IO_1B}+\widehat{O_1O_3A}=90^0$

mà $\widehat{O_1O_3A}=180^0-\left(\frac{180^0-B+180^0}{2}\right)=180^0-\left(180^0-\frac{A+B}{2}\right)=\frac{A+B}{2}$

$$\Rightarrow\widehat{IO_1B}=90^0-\frac{A+B}{2}=\frac{C}{2}, \text{ vậy } IO_1=\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Tương tự $IO_2 = \dfrac{IC}{\sin\dfrac{A}{2}}$; $IO_3 = \dfrac{IA}{\sin\dfrac{B}{2}}$.

Do đó $IO_1.IO_2.IO_3 = \dfrac{IA.IB.IC}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}$.

Do $IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$; $IB = \dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$; $IC = \dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$, nên

$$IO_1.IO_2.IO_3 = \frac{r_3}{\left(\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)^2}. \qquad (1)$$

Ta có: $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$, nên thay vào (1) và có:

Ta có: $IO_1IO_2IO_3 = \dfrac{16R^2\left(\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)^2.r}{\left(\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)^2} = 16R^2r \Rightarrow$ đpcm.

4. Ta có: $O_1O_2 = O_1C + O_2C = \dfrac{r_a}{\sin\widehat{MCO_1}} + \dfrac{r_b}{\sin\widehat{O_2CK}}$

$$= \frac{r_a}{\cos\dfrac{C}{2}} + \frac{r_b}{\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{1}{\cos\dfrac{C}{2}}(r_a + r_b) = \frac{1}{\cos\dfrac{C}{2}}\left(p\tan\frac{A}{2} + p\tan\frac{B}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos\dfrac{C}{2}}4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{A+B}{2} = 4R\cos\frac{C}{2}.$$

Tương tự có: $O_1O_3 = 4R\cos\dfrac{B}{2}$ và $O_2O_3 = 4R\cos\dfrac{A}{2}$.

Từ đó suy ra $O_2O_3 : O_1O_3 : O_1O_2 = \cos\dfrac{A}{2} : \cos\dfrac{B}{2} : \cos\dfrac{C}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 52. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

1. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.
2. $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.
3. $(r + r_a)(4R + r - r_a) = a(b + c)$.

4. $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{4R + r}{p}$.
5. $r + r_a + r_b - r_c = 4R\cos c$.
6. $\dfrac{1}{R^2 - d^2} = \dfrac{1}{d_a^2 - R^2} + \dfrac{1}{d_b^2 - R^2} + \dfrac{1}{d_c^2 - R^2}$,

ở đây $d = IO$, $d_a = IO_a$, $d_b = IO_b$, $d_c = IO_c$,

trong đó I, O, O_a, O_b, O_c tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp góc A, góc B, góc C của ΔABC.

Giải

1. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} \qquad (1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{p}{S} = \dfrac{p-a}{S} + \dfrac{p-b}{S} + \dfrac{p-c}{S}$

$\Leftrightarrow p = 3p - (a + b + c)$

$\Leftrightarrow p = p \qquad (2)$

Từ (2) suy ra (1) đúng ⇒ đpcm.

Ta lại có: $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S} = \dfrac{a+b+c}{2S} = \dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r} \Rightarrow$ đpcm.

2. Ta có: $r_a + r_b + r_c = 4R + r \qquad (1)$

$\Leftrightarrow S\left(\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}\right) = \dfrac{abc}{S} + \dfrac{S}{p}$

$\Leftrightarrow S^2\left(\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}\right) = abc + \dfrac{S^2}{p}$

$\Leftrightarrow p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) = abc + (p-a)(p-b)(p-c)$

$\Leftrightarrow p(p-a)[(p-c) + (p-b)] = abc + (p-b)(p-c)[(p-a) - p]$

$\Leftrightarrow p(p-a)a = abc - a(p-b)(p-c)$

$\Leftrightarrow p(p-a)a + a(p-b)(p-c) = abc$

$\Leftrightarrow a[p(p-a) + (p-b)(p-c)] = abc$

$\Leftrightarrow a[p^2 - pa + p^2 - pb - pc + bc] = abc$

$\Leftrightarrow a[2p^2 - p(a+b+c) + bc] = abc$

$\Leftrightarrow abc = abc \qquad (2)$

Vì (2) hiển nhiên đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

3. Theo phần 2/ ta có: $r_a + r_b + r_c = 4R + r \Rightarrow 4R + r - r_a = r_b + r_c$.

Vậy $(r + r_a)(4R + r - r_a) = (r + r_a)(r_b + r_c)$

$$= \left(\frac{S}{p} + \frac{S}{p-a}\right)\left(\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}\right)$$

$$= S^2\frac{(2p-a)(2p-b-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= (2p-a)a = (b+c)a \Rightarrow \text{đpcm}.$$

4. Theo phần 2/ ta có:

$$4R + r = r_a + r_b + r_c = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) \Rightarrow \text{đpcm}.$$

5. Ta có:

$$r + r_a + r_b + r_c = (p-c)\tan\frac{C}{2} + p\tan\frac{A}{2} + p\tan\frac{B}{2} - p\tan\frac{C}{2}$$

$$= p\tan\frac{A}{2} + p\tan\frac{B}{2} - c\tan\frac{C}{2}$$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} - 2R\sin C\tan\frac{C}{2}$$

$$= 4R\cos^2\frac{C}{2} - 4R^2\sin^2\frac{C}{2} = 4R\cos C \Rightarrow \text{đpcm}.$$

6. Theo công thức Euler, ta có:

$$d^2 = R^2 - 2Rr;\ d_b^2 = R^2 + 2Rd_b;\ d_a^2 = R^2 + 2Rr_a;\ d_c^2 = R^2 + 2Rd_c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2 - d^2} = \frac{1}{2Rr}$$

$$\frac{1}{R^2-d^2} + \frac{1}{d_a^2 - R^2} + \frac{1}{d_c^2 - R^2} = \frac{1}{2Rr_a} + \frac{1}{2Rr_b} + \frac{1}{2Rr_c}.$$

Từ đó suy ra: $\frac{1}{R^2 - d^2} = \frac{1}{d_a^2 - R} + \frac{1}{d_b^2 - R^2} + \frac{1}{d_c^2 - R^2} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Theo phần 1/ suy ra đpcm.

Bài 53. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

1. $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$.

2. $(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0$.

3. $\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = 0$.

4. $bc\cot\frac{A}{2} + ac\cot\frac{B}{2} + ab\cot\frac{C}{2} = 4Rp^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{p}\right)$.

5. $\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}} + \frac{b^2\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}} + \frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}} = ab + bc + ca$.

6. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{h_a}{2r_a + h_a}$.

7. $a\cot A + b\cot B + c\cot C = 2(R + r)$.

8. $\frac{\cos A}{c\cos B + b\cos C} + \frac{\cos B}{c\cos A + a\cos C} + \frac{\cos C}{a\cos B + b\cos A} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$.

9. $\frac{a(a - b\cos C)}{b(b - a\cos C)} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$.

10. $2abc(\cos A + \cos B) = (a + b)(c + b - a)(c + a - b)$.

11. $abc(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - a)$.

Giải

1. Ta có: $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos^2\frac{A}{2}$

$$= \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2} = \frac{\cos C - \cos B}{2}$$

Lập luận tương tự có:

$$\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} = \frac{\cos A - \cos C}{2};\ \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{\cos B - \cos A}{2}$$

Từ đó suy ra VT $= 0 \Rightarrow$ đpcm.

2.3. (chứng minh tương tự 1/)

4. Ta có:

$$VP = 4Rp\left(\frac{p}{a} - 1 + \frac{p}{b} - 1 + \frac{p}{c} - 1\right)$$

$$= 4Rp\left(\frac{p-a}{a} + \frac{p-b}{b} + \frac{p-c}{c}\right) \qquad (1)$$

Áp dụng công thức $r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$, nên từ (1) suy ra:

$$VP = 4Rp\left(\frac{r\cot\frac{A}{2}}{a} + \frac{r\cot\frac{B}{2}}{b} + \frac{r\cot\frac{C}{2}}{c}\right) = 4RS\left(\frac{\cot\frac{A}{2}}{2R\sin A} + \frac{\cot\frac{B}{2}}{2R\sin B} + \frac{\cot\frac{C}{2}}{2R\sin C}\right)$$

(áp dụng S = pr)

$$= S\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right). \qquad (2)$$

Mặt khác:

$$VT = \frac{2S}{\sin A}\cot\frac{A}{2}+\frac{2S}{\sin B}\cot\frac{B}{2}+\frac{2S}{\sin C}\cot\frac{C}{2}$$

$$= S\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right). \qquad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra điều phải chứng minh.

5. Ta có:

$$\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}} = a.\frac{2R\sin A\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}} = aR\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right) = aR(\sin B+\sin C)$$

$$= \frac{ab+ac}{2}.$$

Lập luận tương tự có: $\dfrac{b^2\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}} = \dfrac{ba+bc}{2}$; $\dfrac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}} = \dfrac{ca+cb}{2}$.

Từ đó suy ra đpcm.

6. Ta có: $\dfrac{h_a-2r}{h_a} = 1-2\dfrac{r}{h_a} = 1-2\dfrac{\frac{c}{p}}{\frac{2S}{a}} = 1-\dfrac{a}{p} = \dfrac{p-a}{p}$. $\qquad$ (1)

Ta có: $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$; $p-a = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

(xem các bài trên)

Thay vào (1) có: $\dfrac{h_a-2r}{h_a} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

Lại có: $\dfrac{h_a-2r}{h_a} = \dfrac{h_a}{2r_a+h_a}$ $\qquad$ (*)

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2S}{a}-\frac{2S}{p}}{\frac{2S}{a}} = \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{p-a}+\frac{2S}{a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-a}{p} = \frac{p-a}{p} \qquad (**)$$

Từ (**) suy ra (*) đúng ⇒ đpcm.

7. Ta có:

$$VT = 2R\sin A\frac{\cos A}{\sin A}+2R\sin B\frac{\cos B}{\sin B}+2R\sin C\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$= 2R(\cos A+\cos B+\cos C) = 2R\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2R+2r = 2(R+r) \Rightarrow \text{đpcm}$$

(đã dùng công thức $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$).

8. Theo định lí hàm số sin, ta có:

$$VT = \frac{\cos A}{2R(\sin C\cos B+\sin B\cos C)}+\frac{\cos B}{2R(\sin C\cos A+\sin A\cos C)}+\frac{\cos C}{2R(\sin A\cos B+\sin B\cos A)}$$

$$= \frac{\cos A}{2R\sin(B+C)}+\frac{\cos B}{2R\sin(C+A)}+\frac{\cos C}{2R\sin(A+B)}$$

$$= \frac{1}{2R}(\cot A+\cot B+\cot C). \qquad (1)$$

Áp dụng công thức quen biết, ta có:

$$VT = \frac{1}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{4S}\right)$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2R.4.\frac{abc}{4R}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

9. $VT = \dfrac{2R\sin A.2R(\sin A-\sin B\cos C)}{2R\sin B.2R(\sin B-\sin A\cos C)}$. $\qquad$ (1)

Do $\sin A = \sin(B+C) = \sin B\cos C+\sin C\cos B$

$\sin B = \sin(C+A) = \sin C\cos A+\sin A\cos C$,

nên từ (1) có:

$$VT = \frac{\sin A.\sin C\cos B}{\sin B.\sin C\cos A} = \tan A\cot B$$

$$= \frac{\cot B}{\cot A} = \frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}} = \frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$$

⇒ đpcm.

10. Theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$\begin{aligned}\text{VT} &= a(2b\cos A) + b(2a\cos B) = a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2)\\ &= ab(a + b) + c^2(a + b) - (a^3 + b^3)\\ &= (a + b)(ab + c^2 - a^2 + ab - b^2)\\ &= (a + b)[c^2 - (a - b)^2] = (a + b)(c + a - b)(c + b - a) \Rightarrow \text{đpcm.}\end{aligned}$$

11. Theo định lí hàm số sin, ta có:

$$\begin{aligned}\text{VT} &= a\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + c\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\\ &= \frac{a^2}{2}(b + c - a) + \frac{b^2}{2}(c + a - b) + \frac{c^2}{2}(a + b - c)\\ &= a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c) \Rightarrow \text{đpcm.}\end{aligned}$$

Bài 54. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $\sin^3 A\sin(B - C) + \sin^3 B\sin(C - A) + \sin^3 C\sin(A - B) = 0.$
2. $\sin 3A\sin^3(B - C) + \sin 3B\sin^3(C - A) + \sin 3C\sin^3(A - B) = 0.$
3. $\sin 3A\cos^3(B - C) + \sin 3B\cos^3(C - A) + \sin 3C\cos^3(A - B) = \sin 3A\sin 3B\sin 3C.$

Giải

1. Ta có:

$$\begin{aligned}\sin^3 A\sin(B - C) &= \sin^2 A.\sin A.\sin(B - C)\\ &= \sin^2 A[\sin(B + C)\sin(B - C)]\\ &= \frac{1}{2}\sin^2 A(\cos 2C - \cos 2B) = \frac{1}{2}\sin^2 A(1 - 2\sin^2 C - 1 + 2\sin^2 B)\\ &= \sin^2 A(\sin^2 B - \sin^2 C). \qquad (1)\end{aligned}$$

Lập luận tương tự, có:

$$\sin^3 B\sin(C - A) = \sin^2 B(\sin^2 C - \sin^2 A), \qquad (2)$$

$$\sin^3 C\sin(A - B) = \sin^2 C(\sin^2 A - \sin^2 B). \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) suy ra đpcm.

2. Áp dụng công thức: $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$, ta có:

$$\begin{aligned}\sin 3A\sin^3(B - C) &= \frac{1}{4}\sin 3A[3\sin(B - C) - \sin(3B - 3C)]\\ &= \frac{3}{4}\sin 3A\sin(B - C) - \frac{1}{4}[\cos(3A + 3C - 3B)] - \cos(3A + 3B - 3C)]\end{aligned}$$

Ta có: $3A + C - B = 2A - 2B + (A + B + C) = 2A - 2B + 180^0$

$\Rightarrow \cos(3A + C - B) = -\cos(2A - 2B).$

Tương tự: $\cos(3A + B - C) = -\cos(2A - 2C).$

Lại có: $3A + 3C - 3B = (3A + 3C + 3B) - 6B = 540^0 - 6B$

$\Rightarrow \cos(3A + 3C - 3B) = \cos(180^0 - 6B) = -\cos 6B.$

Tương tự: $\cos(3A + 3B - 3C) = -\cos 6C.$

Từ đó ta có:

$$\sin 3A\sin^3(B - C) = \frac{3}{8}[\cos(2A - 2C) - \cos(2A - 2B)] - \frac{1}{8}(\cos 6C - \cos 6B)]. \ (4)$$

Tương tự ta có:

$$\sin 3B\sin^3(C - A) = \frac{3}{8}[\cos(2B - 2A) - \cos(2B - 2C)] - \frac{1}{8}(\cos 6A - \cos 6C)], \ (5)$$

$$\sin 3C\sin^3(A - B) = \frac{3}{8}[\cos(2C - 2B) - \cos(2C - 2A)] - \frac{1}{8}(\cos 6B - \cos 6A)]. \ (6)$$

Cộng từng vế (4) (5) (6) suy ra đpcm.

3. Chứng minh như phần 2/ bằng cách sử dụng công thức:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \Rightarrow \text{cops}^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha).$$

Bài 55. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC, ta có:

1. $R = \sqrt{r.r_a r_b r_c}$.
2. $\frac{1}{r_a^2}\tan\frac{A}{2} + \frac{1}{r_b^2}\tan\frac{B}{2} + \frac{1}{r_c^2}\tan\frac{C}{2} = \frac{4R}{abc}$.
3. $\frac{2pr}{R} = a\cos A + b\cos B + c\cos C$.
4. $(b + c)\cos^2\frac{A}{2} + (a + c)\cos^2\frac{B}{2} + (a + b)\cos^2\frac{C}{2} = 3p$.
5. $bc\cos^2\frac{A}{2} + ac\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = p^2$.
6. $S = p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.
7. $S = \frac{1}{4}(a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C)$.
8. $S = \frac{(a^2 - b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A - B)}$ (với giả thiết $a \neq b$).
9. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a\sin A + b\sin B + c\sin C}{a\cos A + b\cos B + c\cos C}$.
10. $\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 3}$.
11. $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$.

Giải

1. Ta có: $\sqrt{r.r_ar_br_c}=\sqrt{\frac{S}{p}\frac{S}{p-a}\frac{S}{p-b}\frac{S}{p-c}}=\sqrt{\frac{S^4}{S^2}}=S\Rightarrow$ đpcm.

2. Ta có: $VT=\frac{\tan\frac{A}{2}}{p^2\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}}{p^2\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{p^2\tan^2\frac{C}{2}}$,

$$VP=\frac{4R}{4RS}=\frac{1}{S}=\frac{1}{pr}\left(\text{do } S=\frac{abc}{4R}\right)$$

Vậy đẳng thức cần chứng minh có dạng tương đương sau:

$$\frac{1}{p^2\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{p^2\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{p^2\tan\frac{C}{2}}=\frac{1}{pr}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{p\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{p\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{p\tan\frac{C}{2}}=\frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow r=p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$\left(\text{do đã sử dụng }\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1\right)$

$$\Leftrightarrow r=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\qquad(1)$$

Vì (1) đúng suy ra đpcm.

3. Ta có: $a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$=2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C$

$=R(\sin2A+\sin2B+\sin2C)=4R\sin A\sin B\sin C$

Mặt khác: $\frac{2pr}{R}=\frac{2S}{R}=\frac{2.2R^2\sin A\sin B\sin C}{R}=4R\sin A\sin B\sin C\Rightarrow$ đpcm.

4. Ta có:

$$VT=(b+c)\frac{1+\cos A}{2}+(a+c)\frac{1+\cos B}{2}+(a+b)\frac{1+\cos C}{2}$$

$$=\frac{b+c+a+c+a+b}{2}+R(\sin B\cos A+\sin C\cos A+\sin A\cos B+\sin C\cos B+\sin A\cos C+\sin B\cos C)$$

$$=2p+R[\sin(B+A)+\sin(a+C)+\sin(C+B)]=2p+R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$=2p+\frac{a+b+c}{2}=3p\Rightarrow\text{đpcm.}$$

5. Chứng minh tương tự 4/.

6. $p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=p\left(4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

$$=p\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=pr=S\Rightarrow\text{đpcm.}$$

7. $VP=\frac{1}{4}\left(a.2R\sin A\frac{\cos A}{\sin A}+b.2R\sin B\frac{\cos B}{\sin B}+c.2R.\sin C\frac{\cos C}{\sin C}\right)$

$$=\frac{R}{2}(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$

Theo phần 3/ thì $VP=\frac{R}{2}=\frac{2pr}{R}=pr=S\Rightarrow$ đpcm.

8. $VP=\frac{4R^2(\sin^2A-\sin^2B)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$

$$=\frac{2R^2[(1-\cos2A)-(1-\cos2B)]\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}$$

$$=\frac{-2R^2.2\sin(B+A)\sin(B-A)}{2\sin(A-B)}\sin A\sin B$$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin C=S\Rightarrow\text{đpcm.}$$

9. $VP=\frac{2R(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}{2R(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)}=\frac{2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}{\sin2A+\sin2B+\sin2C}$

$$=\frac{2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}{4\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin A}{\sin B\sin C}+\frac{\sin B}{\sin A\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A\sin B}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}+\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\cot B+\cot C+\cot A+\cot C+\cot A+\cot B)$$

$$=\cot A+\cot B+\cot C\Rightarrow\text{đpcm.}$$

10. Chứng minh tương tự 9.

11. Áp dụng công thức: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$, ta có:

$$\mathrm{VP}=\frac{1}{2}\left[\left(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)+\left(\tan\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)+\left(\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 56. (Sử dụng phương pháp đặc biệt chứng minh hệ thức lượng giác)

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$p^2+r^2=2R(h_a+h_b+h_c-2r)$.

Giải

Ta có: $p^2+r^2=2R(h_a+h_b+h_c-2r)$

$\Leftrightarrow p^2+r^2+4Rr=2R(h_a+h_b+h_c)$

$\Leftrightarrow p^2+r^2+4Rr=2R\left(\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\right)$

$\Leftrightarrow p^2+r^2+4Rr=\frac{2R}{abc}(ab+bc+ca).2\frac{abc}{4R}$

$\Leftrightarrow p^2+r^2+4Rr=ab+bc+ca.$ (1)

Theo hệ thức lượng cơ bản trong tam giác, ta có: $\begin{cases}\tan\frac{A}{2}=\frac{p}{p-a}\\ \sin A=\frac{a}{2R}.\end{cases}$

Vì $\sin A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}\Rightarrow\frac{a}{2R}=\frac{2\frac{r}{p-a}}{1+\frac{r^2}{(p-a)^2}}$. (2)

Từ (2) sau khi rút gọn, ta có: $a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4pRr=0$ (3)

Từ (3) suy ra a là nghiệm của phương trình:

$x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0.$ (4)

Do vai trò bình đẳng nên b, c cũng là nghiệm của (4)

Vì thế áp dụng định lí Viet với (4), ta có: $ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr$

Vậy (1) đúng ⇒ đpcm.

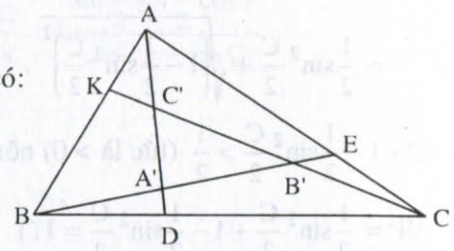
Bài 57. (Đường n–tuyến trong tam giác)

Cho tam giác ABC. Các đường AD, BE, CK (D, E, K lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB) gọi là các đường n-tuyến của ΔABC nếu như:

$\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}=\frac{AK}{AB}=\frac{1}{n}$, n là số dương

Đặt $AD=d_a$; $BE=d_b$; $CK=d_c$ là độ dài của các đường n–tuyến. Chứng minh rằng $d_a^2+d_b^2+d_c^2=\frac{n^2-n+1}{n^2}(a^2+b^2+c^2)$.

Giải



Áp dụng định lí Stewait vào ΔABC, ta có:

$a.AD^2=BD.b^2+DC.c^2-a.BD.DC$ (1)

Do $BD=\frac{a}{n}$; $DC=\frac{(n-1)a}{n}$, vậy từ (1) có:

$a.AD^2=\frac{a}{n}.b^2+\frac{(n-1)a}{n}c^2-a\frac{a^2(n-1)}{n^2}$,

hay $d_a^2=\frac{b^2+(n-1)c^2}{n}-\frac{(n-1)a^2}{n^2}$

$=\frac{nb^2+n(n-1)c^2-(n-1)a^2}{n^2}$. (2)

Lập luận tương tự có: $d_b^2=\frac{nc^2+n(n-1)a^2-(n-1)b^2}{n^2}$, (3)

$d_c^2=\frac{na^2+n(n-1)b^2-(n-1)c^2}{n^2}$. (4)

Cộng từng vế (2) (3) (4) và có: $d_a^2+d_b^2+d_c^2=\frac{n^2-n+1}{n^2}(a^2+b^2+c^2)$.

⇒ đpcm.

Chú ý:

1. Đường trung tuyến theo khái niệm trên là đường 2–tuyến

   Áp dụng kết quả trên, ta có:

   Trong mọi tam giác ABC, thì $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$.

2. Các bạn có thể thử lại kết quả lí thú sau: Nếu AD, BE, CK là các đường n tuyến thì các tam giác KDE, A'B'C', ABC có cùng trọng tâm.

Bài 58. Cho tam giác ABC. Giả sử $\frac{l_c}{m_c}=k$ và φ là góc giữa đường phân giác và trung tuyến của tam giác kẻ từ C. Chứng minh:

$$\cos\varphi=\frac{k}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}\sin^4\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}.$$

Giải

Xét hai trường hợp sau:

1. Nếu CAB là tam giác cân đỉnh C. Khi đó $l_c = m_c \Rightarrow k = 1$.

Lúc này $\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0$

Mặt khác khi ấy:

$$VP = \frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\sin^4\frac{C}{2} + 1 - \sin^2\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right)^2}.$$

Do $1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2} > \frac{1}{2}$ (tức là > 0) nên

$$VP = \frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2} = 1.$$

Vậy đẳng thức cần chứng minh là đúng trong trường hợp này.

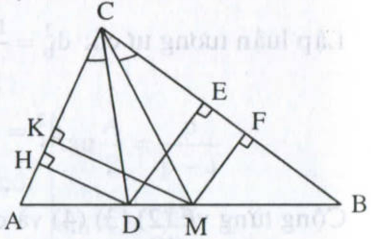
2. Nếu CAB không phải là tam giác cân đỉnh C. Khi đó có thể cho là A > B.

Vẽ phân giác CD và trung tuyến CM của ΔABC,

ta có: $\widehat{DCM} = \varphi$.

Kẻ DH và MK cùng vuông góc AC,

DE và MF cùng vuông góc với BC.



Ta có: $\frac{DH}{DC} = \sin\frac{C}{2}$, $\frac{DE}{DC} = \sin\frac{C}{2}$, (1)

$$\frac{MK}{CM} = \sin\left(\frac{C}{2} + \varphi\right), \quad (2)$$

$$\frac{MF}{CM} = \sin\left(\frac{C}{2} - \varphi\right). \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) và kết hợp với $\frac{CD}{CM} = \frac{l_a}{m_a = k,}$ ta có:

$$\frac{DH}{MK}.\frac{CM}{CD} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{C}{2} + \varphi\right)} \Leftrightarrow \frac{DH}{MK}.\frac{1}{k} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{C}{2} + \varphi\right)}, \quad (4)$$

$$\frac{DE}{MF}.\frac{CM}{CD} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{C}{2} - \varphi\right)} \Leftrightarrow \frac{DE}{MF}.\frac{1}{k} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{C}{2} - \varphi\right)}. \quad (5)$$

Theo định lí Talet (do DH // MK, DE // MF), ta có:

$$\frac{DH}{MK} = \frac{AD}{AM}; \frac{DE}{MF} = \frac{BD}{BM}. \quad (6)$$

Từ (4) (5) (6), suy ra: $\frac{1}{k}\left(\frac{AD}{AM} + \frac{BD}{BM}\right) = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{C}{2} + \varphi\right)} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{C}{2} - \varphi\right)}$

$$\Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{\sin\frac{C}{2}\left[\sin\left(\frac{C}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{C}{2} - \varphi\right)\right]}{\sin\left(\frac{C}{2} + \varphi\right)\sin\left(\frac{C}{2} - \varphi\right)} \Rightarrow \frac{2}{k} = 4\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\varphi}{\cos 2\varphi - \cos C}$$

$$\Rightarrow \cos 2\varphi - \cos C = 2k\sin^2\frac{C}{2}\cos\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2\varphi - \left(k\sin^2\frac{C}{2}\right)\cos\varphi - \cos^2\frac{C}{2} = 0 \quad (7)$$

Do $\varphi < 90^0$ nên $\cos\varphi > 0$ vậy từ (7) suy ra:

$\cos\varphi = \frac{k}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4}\sin^4\frac{C}{2} + \cos^2\frac{C}{2}}$. Đó là đpcm.

Bài 59. (Bài toán phụ trợ)

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có các đẳng thức sau:

1. $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4R^2}$.
2. $\sin A\sin B\sin C = \frac{pr}{2R^2}$.
3. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2}$.
4. $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = \frac{p(p^2 - 6Rr - 3r^2)}{4R^3}$.
5. $(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) = \frac{p(p^2 + r^2 + 2Rr)}{4R^3}$.
6. $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C = \frac{p^4 - (8Rr + 6r^2)p^2 + r^2(4R + r)^2}{8R^4}$.
7. $\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \frac{r^2 + p^2 - 4R^2}{4R^2}$.
8. $\cos A\cos B\cos C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}$.

9. $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = \dfrac{6R^2 + \$Rr + r^2 - p^2}{2R^2}$.

10. $\cos^3A + \cos^3B + \cos^3C = \dfrac{2Rr^2 + r^3 + p^2r}{4R^3} - 1$.

11. $(\cos A + \cos B)(\cos B + \cos C)(\cos C + \cos A) = \dfrac{2Rr^2 + r^3 + p^2r}{4R^3}$.

12. $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr}$.

13. $\dfrac{1}{\sin A\sin B} + \dfrac{1}{\sin B\sin C} + \dfrac{1}{\sin C\sin A} = \dfrac{2R}{r}$.

14. $\dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C} = \dfrac{\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right)^2 - 16p^2Rr}{4p^2R^2}$.

15. $\dfrac{\sin A\sin B}{\sin C} + \dfrac{\sin B\sin C}{\sin A} + \dfrac{\sin C\sin A}{\sin B} = \dfrac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}$.

16. $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} = \dfrac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R - r)^2}$.

17. $\dfrac{1}{\cos A\cos B} + \dfrac{1}{\cos B\cos C} + \dfrac{1}{\cos C\cos A} = \dfrac{4R(R + r)}{p^2 - (2R + r)^2}$.

18. $\dfrac{1}{\cos^2 A} + \dfrac{1}{\cos^2 B} + \dfrac{1}{\cos^2 C} = \dfrac{\left(p^2 + r^2 - 4R^2\right) - 8R(R + r)\left[p^2 - (2R + r)^2\right]}{\left[p^2 - (2R + r)^2\right]}$.

19. $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos C} + \dfrac{\cos B + \cos C}{\cos A} + \dfrac{\cos C + \cos A}{\cos B} = \dfrac{(R + r)\left(p^2 + r^2 - 4R^2\right)}{R\left[p^2 - (2R + r)^2\right]} - 3$.

20. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} + \dfrac{\sin C + \sin A}{\cos C + \cos A} = \dfrac{p}{r}$.

21. $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{2R - r}{2R}$.

22. $\sin^4\dfrac{A}{2} + \sin^4\dfrac{B}{2} + \sin^4\dfrac{C}{2} = \dfrac{8R^2 + r^2 - p^2}{8R^2}$.

23. $\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2}$.

24. $\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{4R + r}{2R}$.

25. $\cos^4\dfrac{A}{2} + \cos^4\dfrac{B}{2} + \cos^4\dfrac{C}{2} = \dfrac{(4R + r)^2 - p^2}{8R^2}$.

26. $\cos^2\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2}\cos^2\dfrac{C}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2}\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{p^2 + (4R + r)^2}{16R^2}$.

27. $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}} = \dfrac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2}$.

28. $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}\sin^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{8R(2R - r)}{r^2}$.

29. $\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{C}{2}} = \dfrac{p^2 + (4R + r)^2}{p^2}$.

30. $\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{B}{2}\cos^2\dfrac{C}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{C}{2}\cos^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{8R(4R + r)}{p^2}$.

31. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \dfrac{3R^2 + 4Rr + r^2 - p^2}{R^2}$.

32. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \dfrac{2pr}{R^2}$.

33. $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr}$.

34. $\cot A\cot B\cot C = \dfrac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr}$.

35. $\cot^2A + \cot^2B + \cot^2C = \dfrac{\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)^2}{4p^2r^2} - 2$.

36. $(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \dfrac{2R^2}{p^2}$.

37. $\cot^3A + \cot^3B + \cot^3C = \dfrac{\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)^3 - 48p^2R^2r^2}{8p^3r^3}$.

38. $\tan A + \tan B + \tan C = \dfrac{2pr}{p^2 - (2R + r)^2}$.

39. $\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A = \dfrac{p^2 - r^2 - 4Rr}{p^2 - (2R + r)^2}$.

40. $\tan^2A + \tan^2B + \tan^2C = \dfrac{4p^2r^2 - 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\left[p^2 - (2R+r)^2\right]}{\left[p^2 - (2R+r)^2\right]^2}$.

41. $\tan^3A + \tan^3B + \tan^3C = \dfrac{8pr\left[p^2r^2 - 3R^2\left(p^2 - (2R+r)^2\right)\right]}{\left[p^2 - (2R+r)^2\right]^3}$.

42. $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{4R+r}{p}$.

43. $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p}$.

44. $\left(\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\right)\left(\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\right)\left(\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{4R}{p}$.

45. $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2\dfrac{B}{2} + \tan^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2}$.

46. $\tan^3\dfrac{A}{2} + \tan^3\dfrac{B}{2} + \tan^3\dfrac{C}{2} = \dfrac{(4R+r)^3 - 12p^2R}{p^3}$.

47. $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{p}{r}$.

48. $\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{4R+r}{p}$.

49. $\cot^2\dfrac{A}{2} + \cot^2\dfrac{B}{2} + \cot^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{p^2 - 2r(4R+r)}{r^2}$.

50. $\cot^3\dfrac{A}{2} + \cot^3\dfrac{B}{2} + \cot^3\dfrac{C}{2} = \dfrac{p\left(p^2 - 12Rr\right)}{r^3}$.

51. $\left(\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2}\right)\left(\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right)\left(\cot\dfrac{C}{2} + \cot\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{4pR}{r^2}$.

52. $\dfrac{a}{p-a} + \dfrac{b}{p-b} + \dfrac{c}{p-c} = \dfrac{\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{C}{2}} + \dfrac{\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}}{\tan\dfrac{A}{2}} + \dfrac{\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{A}{2}}{\tan\dfrac{B}{2}}$.

$$= \dfrac{\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2}}{\cot\dfrac{C}{2}} + \dfrac{\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}}{\cot\dfrac{A}{2}} + \dfrac{\cot\dfrac{C}{2} + \cot\dfrac{A}{2}}{\cot\dfrac{B}{2}} = \dfrac{4R-2r}{r}.$$

53. $a\tan\dfrac{A}{2} + b\tan\dfrac{B}{2} + c\tan\dfrac{C}{2} = 2(2R - r)$.

54. $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

55. $r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2$.

56. $r_ar_br_c = p^2r$ va2 $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

57. $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R+r)^2 - 2p^2$.

58. $r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (4R+r)^3 - 12p^2R$.

59. $(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 4p^2R$.

60. $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$.

61. $\dfrac{1}{r_ar_b} + \dfrac{1}{r_br_c} + \dfrac{1}{r_cr_a} = \dfrac{4R+r}{p^2r}$.

62. $\dfrac{1}{r_a^2} + \dfrac{1}{r_b^2} + \dfrac{1}{r_c^2} = \dfrac{p^2 - 2r(4R+r)}{p^2r^2}$.

63. $\dfrac{r_a + r_b}{r_c} + \dfrac{r_b + r_c}{r_a} + \dfrac{r_c + r_a}{r_b} = \dfrac{4R - 2r}{r}$.

64. $h_a + h_b + h_c = \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$.

65. $h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a = \dfrac{2p^2r}{R}$.

66. $h_ah_bh_c = \dfrac{2p^2 + r^2}{R}$ và $S\sqrt{\dfrac{1}{2}Rh_ah_bh_c}$.

67. $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

68. $\dfrac{1}{h_ah_b} + \dfrac{1}{h_bh_c} + \dfrac{1}{h_ch_a} = \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4p^2r^2}$.

69. $\dfrac{1}{h_a^2} + \dfrac{1}{h_b^2} + \dfrac{1}{h_c^2} = \dfrac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2r^2}$.

70. $\dfrac{h_a + h_b}{h_c} + \dfrac{h_b + h_c}{h_a} + \dfrac{h_c + h_a}{h_b} = \dfrac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}$.

71. $(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) = 4Rr + r^2$.

72. $(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 = p^2 - 2r(4R + r)$.

73. $(p-a)^3 + (p-b)^3 + (p-c)^3 = p(p^2 - 12Rr)$.

74. $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} = \dfrac{4R+r}{pR}$.

75. $\dfrac{1}{(p-a)^2}+\dfrac{1}{(p-b)^2}+\dfrac{1}{(p-c)^2}=\dfrac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2r}$.

76. $l_al_bl_c=\dfrac{16Rr^2p^2}{p^2+2Rr+r^2}$.

Bài giải

Để chứng minh bài toán trên, ta cần đến các bổ đề (các kết quả phụ) sau đây:

Bổ đề 1.

Các cạnh a, b, c của tam giác ABC là các nghiệm của phương trình bậc ba:

$x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0.$

Chứng minh:

Áp dụng định lí hàm số sin ta có $a=2R\sin A\Rightarrow \sin A=\dfrac{a}{2R}$.

Lại có $r=(p-a)\tan\dfrac{A}{2}\Rightarrow \tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{p-a}$

Từ hệ thức $\sin A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}\Rightarrow \dfrac{a}{2R}=\dfrac{\frac{2r}{p-a}}{1+\frac{4r^2}{(p-a)^2}}\Rightarrow \dfrac{a}{2R}=\dfrac{2r(p-a)}{4r^2(p-a)^2}$

$\Rightarrow a(p-a)^2+4r^2a-4Rr(p-a)=0$

$\Rightarrow a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4pRr=0.\qquad(1)$

Hệ thức (1) chứng tỏ rằng a là nghiệm của phương trình bậc ba.

$x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0.\qquad(2)$

Lý luận tương tự b và c cũng thỏa mãn (2) và đó là đpcm.

Bổ đề 2.

sinA, sinB, sinC là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$4R^2x^3-4Rpx^2+(p^2+r^2+4Rr)x-2pr=0.$

Chứng minh:

Thay biến $x=\dfrac{t}{2R}$, thì

$4R^2x^2-4Rpx^2+(p^2+r^2+4Rr)x-2pr=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^3}{2R}-pt^2+\left(p^2+r^2+4Rr\right)\dfrac{t}{2R}-2pr=0$

$\Leftrightarrow t^3-2pt^2+(p^2+r^2+4Rr)t-4pRr=0.\qquad(1)$

Theo bổ đề 1, thì a, b, c là các nghiệm của (1).

Do đó $\dfrac{a}{2R},\dfrac{b}{2R},\dfrac{c}{2R}$ là các nghiệm của phương trình đã cho, tức là sinA, sinB, sinC là ba nghiệm của phương trình:

$4R^2x^3-4Rpx^2+(p^2+r^2+4Rr)x-2pr=0.$

Đó là đpcm.

Bổ đề 3.

cosA, cosB, cosC là các nghiệm của phương trình

$4R^2x^2-4R(R+r)x^2+(p^2+r^2-4R^2)x+(2R+r)^2-p^2=0.$

Chứng minh:

Ta có: $p=a+(p-a)$

$\Leftrightarrow\quad p=2R\sin A+r\cot\dfrac{A}{2}.\qquad(*)$

Do trong mọi tam giác ABC thì $\sin A>0$, $\cot\dfrac{A}{2}>0$; nên

$(*)\Leftrightarrow\ p=2R\sqrt{(1-\cos A)(1+\cos A)}+r\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}$

$\Leftrightarrow\ p^2(1-\cos A)=(1+\cos A)[2R(1-\cos A)+r]^2$

$\Leftrightarrow\ p^2-p^2\cos A$

$=\ (1+\cos A)(4R^2\cos^2A-4R^2\cos A+4R^2+r^2+4Rr-4Rr\cos A)$

$\Leftrightarrow\ 4R^2\cos^3A-4R(R+r)\cos^2A+(p^2+r^2-4R^2)\cos A+(2R+r)^2-p^2=0.$

Từ (1) suy ra cosA là nghiệm của phương trình bậc ba:

$4R^2x^2-4R(R+r)x^2+(p^2+r^2-4R^2)x+(2R+r)^2-p^2=0.$

Tương tự cosB, cosC cũng thỏa mãn phương trình ấy.

Đó là đpcm.

Bổ đề 4.

$\dfrac{1}{\sin A},\dfrac{1}{\sin B},\dfrac{1}{\sin C}$ là các nghiệm của phương trình

$2prx^3-(p^2+r^2+4Rr)x^2+4Rpx-4R^2=0.$

Chứng minh:

Đặt $x=\dfrac{1}{t}$, khi đó

$2prx^3-(p^2+r^2+4Rr)x^2+4Rpx-4R^2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2pr}{t^3}-\left(p^2+r^2+4Rr\right)\dfrac{1}{t^2}+4Rp\dfrac{1}{t}-4R^2=0$

$\Leftrightarrow 4R^2t^3-4Rpt^2+\left(p^2+r^2+4Rr\right)t-2pr=0.\qquad(1)$

Theo bổ đề 2 thì sinA, sinB, sinC là các nghiệm của (1).

Do đó $\frac{1}{\sin A}, \frac{1}{\sin B}, \frac{1}{\sin C}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$2prx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4Rpx - 4R^2 = 0.$

Bổ đề 5.

$\frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, \frac{1}{\cos C}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$\left[p^2 - (2R+r)^2\right]x^3 - \left(p^2 + r^2 - 4R^2\right)x^2 + 4R(r+R)x - 4R^2 = 0.$

Chứng minh tương tự như bổ đề 4 bằng cách thay biến $x = \frac{1}{t}$ rồi áp dụng bổ đề 3.

Bổ đề 6.

$\sin^2\frac{A}{2}, \sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0.$

Chứng minh:

Đặt $x = \frac{1-t}{2}$, thì

$$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16R^2\frac{(1-t)^3}{8} - 8R(2R-r)\frac{(1-t)^2}{4} + \left(p^2 + r^2 - 8Rr\right)\frac{1-t}{2} - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4R^2(1 - t)^3 - 4R(2R - r)(1 - t)^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)(1 - t) - 2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4R^2t^3 - 4R(R + r)t^2 + (p^2 + r^2 - 4R^2)t + (2R + r)^2 - p^2 = 0. \qquad (1)$$

Theo bổ đề 3, thì cosA, cosB, cosC là các nghiệm của (1).

Do vậy $\frac{1-\cos A}{2}, \frac{1-\cos B}{2}, \frac{1-\cos C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0. \qquad (*)$

Điều đó có nghĩa là $\sin^2\frac{A}{2}, \sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}$ là các nghiệm của (*) $\Rightarrow$ đpcm.

Bổ đề 7.

$\cos^2\frac{A}{2}, \cos^2\frac{B}{2}, \cos^2\frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$16R^2x^3 - 8R(4R + r)t^2 + \left[p^2(4R+r)^2\right]t - p^2 = 0$

Chứng minh:

Bằng cách thay biến $x = \frac{1+t}{2}$, và dùng bổ đề 3 (chứng minh như bổ đề 6) suy ra đpcm.

Bổ đề 8.

$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}, \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}, \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$r^2x^3 - (p^2 + r^2 - 8Rr)x^2 + 8R(2R - r)x - 16R^2 = 0.$

Chứng minh:

Đặt $x = \frac{1}{t}$, khi ấy

$$r^2x^3 - (p^2 + r^2 - 8Rr)x^2 + 8R(2R - r)x - 16R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2}{t^3} - \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{t^2} + \frac{8R(2R-r)}{t} - 16R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16R^2t^3 - 8R(2R + r) + (p^2 + r^2 - 8Rr) + r^2 = 0.$$

Theo bổ đề 6 thì $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}, \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}, \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba: $r^2x^3 - (p^2 + r^2 - 8Rr)x^2 + 8R(2R - r)x - 16R^2 = 0.$

Đó là đpcm.

Bổ đề 9.

$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}, \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}, \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$p^2x^3 - \left[p^2 + (4R+r)^2\right]^2x^2 + 8R(4 + r)x - 16R^2 = 0.$

Chứng minh bằng phép đổi biến $x = \frac{1}{t}$ và áp dụng bổ đề 7.

Bổ đề 10.

cotA, cotB, cotC là các nghiệm của phương trình bậc ba

$2prx^3 - (p^2 - r^2 - 4Rr)x^2 + 2prx + (2R + r)^2 - p^2 = 0.$

Chứng minh:

Ta có: $a + (p - a) = p$

$$\Leftrightarrow 2R\sin A + r\cot\frac{A}{2} = p$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R}{\sqrt{1+\cot^2 A}} + r\sqrt{1+\cot^2 A} = p - r\cot A$$

$$\Leftrightarrow \left[2R + r\left(1+\cot^2 A\right)\right]^2 = \left(1+\cot^2 A\right)\left(p - r\cot A\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (2R + r + r\cot^2 A)^2 = (1 + \cot^2 A)(p^2 - 2pr\cot A + r^2\cot^2 A)$$

$$\Leftrightarrow 2pr\cot^3A - (p^2 - r^2 - 4Rr)\cot^2A + 2pr\cot A + (2R + r)^2 - p^2 = 0 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra cotA là nghiệm của phương trình

$$2prx^3 - (p^2 - r^2 - 4Rr)x^2 + 2prx + (2R + r)^2 - p^2 = 0 \quad (*)$$

Lý luận tương tự cotB, cotC cũng là nghiệm của (*) ⇒ đpcm.

Bổ đề 11.

tanA, tanB, tanC là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$\left[p^2 - (2R + r)^2\right]x^3 - 2prx^2 + \left(p^2 - 4Rr - r^2\right)x - 2pr = 0$$

Chứng minh:

Đặt $x = \frac{1}{t}$. Khi đó

$$\left[p^2 - (2R + r)^2\right]x^3 - 2prx^2 + \left(p^2 - 4Rr - r^2\right)x - 2pr = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - (2R + r)^2}{t^3} - \frac{2pr}{t^2} + \frac{\left(p^2 - 4Rr - r^2\right)}{t} - 2pr = 0$$

$$\Leftrightarrow 2prt^3 - (p^2 - 4Rr - r^2)t^2 + 2prt + (2R + r)^2 - p^2 = 0 \quad (1)$$

Theo bổ đề 10 thì cotA, cotB, cotC là ba nghiệm của (1). Điều đó có nghĩa là tanA, tanB, tanC là ba nghiệm của phương trình bậc ba.

$$\left[p^2 - (2R + r)^2\right]x^3 - 2prx^2 + \left(p^2 - 4Rr - r^2\right)x - 2pr = 0$$

Bổ đề 11 được chứng minh.

Bổ đề 12.

$\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$px^3 - (4R + r)x^2 + px - r = 0.$$

Chứng minh:

Ta có: $a + (p - a) = p$

$$\Leftrightarrow 2R\sin A + r\cot\frac{A}{2} = p \Leftrightarrow \frac{4R\tan\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}} + \frac{r}{\tan\frac{A}{2}} = p$$

$$\Leftrightarrow 4R\tan^2\frac{A}{2} + r + r\tan^2\frac{A}{2} = p\tan\frac{A}{2} + p\tan^3\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow p\tan^3\frac{A}{2} - (4R + r)\tan^2\frac{A}{2} + p\tan\frac{A}{2} - r = 0. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $\tan\frac{A}{2}$ là nghiệm của phương trình bậc ba

$$px^3 - (4R + r)x^2 + px - r = 0.$$

Lập luận tương tự $\tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ cũng thỏa mãn phương trình (*) ⇒ đpcm.

Bổ đề 13.

$\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$rx^3 - px^2 + (4R + r)x - p = 0.$$

Chứng minh:

Đặt $x = \frac{1}{t}$, thì

$$rx^3 - px^2 + (4R + r)x - p = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{t^3} - \frac{p}{t^2} + \frac{(4R + r)}{t} - p = 0$$

$$\Leftrightarrow pt^3 - (4R + r)t^2 + pt - r = 0. \quad (1)$$

Theo bổ đề 12 thì $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ là các nghiệm của (1).

Do đó $\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}, \frac{1}{\tan\frac{B}{2}}, \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$ (tức là $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$) là các nghiệm của phương trình bậc ba:

$$rx^3 - px^2 + (4R + r)x - p = 0.$$

Bổ đề 13 được chứng minh.

Bổ đề 14.

r_a, r_b, r_c là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0.$$

Chứng minh:

Dùng phép thay biến $x = pt$, ta có:

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$$

$$\Leftrightarrow p^3t^3 - (4R + r)p^2t^2 + p^3t - p^2r = 0$$

$$\Leftrightarrow pt^3 - (4R + r)t^2 = pt - r = 0 \quad (1)$$

Theo bổ đề 12 thì $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ là các nghiệm của (1).

Do đó $p\tan\frac{A}{2}, p\tan\frac{B}{2}, p\tan\frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$$

Vì $r_a = p\tan\frac{A}{2}, r_a = p\tan\frac{B}{2}, r_a = p\tan\frac{C}{2}$

⇒ đpcm.

Bổ đề 15.

$\frac{1}{r_a}, \frac{1}{r_b}, \frac{1}{r_c}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$p^2x^3 - p^2x^2 + (4R + r)x - 1 = 0.$$

Chứng minh bằng cách thay biến. Đặt $x = \frac{1}{t}$ và áp dụng bổ đề 14.

Bổ đề 16.

h_a, h_b, h_c là các nghiệm của phương trình

$2Rx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rx)x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0$

Chứng minh:

Dùng phép thay biến $x = \frac{2pr}{t}$, ta có:

$$2Rx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rx)x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R(2pr)^3}{t^3} - (p^2 + r^2 + 4Rr)\frac{(2pr)^2}{t^2} + 4p^2r\frac{2pr}{t} - 4p^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2r^2t^3 - 2p^3r^3t^2 + p^2r^2(p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4Rp^3r^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 2pt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4Rrp = 0 \qquad (1)$$

Theo bổ đề 1 thì a, b, c là các nghiệm của (1).

Do đó $\frac{2pr}{a}, \frac{2pr}{b}, \frac{2pr}{c}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$2Rx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rx)x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0$$

Vì $h_a = \frac{2pr}{a}$; $h_b = \frac{2pr}{b}$; $h_c = \frac{2pr}{c}$ nên suy ra đpcm.

Chứng minh bài toán phụ trợ như sau:

Theo bổ đề 2 thì sinA, sinB, sinC là các nghiệm của phương trình

$4R^2x^3 - 4Rpx^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 2pr = 0.$

Áp dụng định lí Viet với phương trình này, ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{4Rp}{4R^2} = \frac{p}{R},$$

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2},$$

$$\sin A\sin B\sin C = \frac{2pr}{4R^2} = \frac{pr}{2R^2}.$$

Do $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = (\sin A + \sin B + \sin C)^2$
$- 2(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)$,

nên từ trên có:

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \left(\frac{p}{R}\right)^2 - 2\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} = \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2}.$$

Lại thấy:

$$\sin^4A + \sin^4B + \sin^4C = (\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C)^2 - 2(\sin^2A\sin^2B + \sin^2B\sin^2C + \sin^2C\sin^2A)$$

$$= (\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C) - 2[(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)^2 - 2\sin A\sin B\sin C(\sin A + \sin B + \sin C)].$$

Áp dụng các tính toán trên, đi đến

$\sin^4A + \sin^4B + \sin^4C =$

$$= \left(\frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2}\right)^2 - 2\left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}\right)^2 + 4\frac{pr}{2R^2}.\frac{p}{R}$$

$$= \frac{2(p^2 - 4Rr - r^2)^2 - (p^2 + r^2 + 4Rr)^2 + 16p^2rR}{8R^4}$$

$$= \frac{p^4 - p^2(8Rr + 6r^2) + r^2(4R + r)^2}{8R^4}.$$

Ta có:

$\sin^3A + \sin^3B + \sin^3C$

$$= (\sin A + \sin B + \sin C)^3 - 3\sin A\sin B(\sin A + \sin B) - 3\sin B\sin C(\sin B + \sin C) - 3\sin C\sin A(\sin C + \sin A) - 6\sin A\sin B\sin C$$

$$= (\sin A + \sin B + \sin C)^3 - 3(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)(\sin A + \sin B + \sin C) + 3\sin A\sin B\sin C$$

Vì thế áp dụng các phép tính trên, đi đến

$$\sin^3A + \sin^3B + \sin^3C = \frac{p^3}{R^3} - 3\frac{p}{R}\left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}\right) + \frac{3pr}{2R^2}$$

$$= \frac{p^3 - 3r^2p - 12pRr + 6pRr}{4R^3} = \frac{p(p^2 - 6Rr - 3r^2)}{4R^3}.$$

Sau hết ta có:

$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)$

$$= 2\sin A\sin B\sin C + \sin A\sin B(\sin A + \sin B) + \sin B\sin C(\sin B + \sin C) + \sin C\sin A(\sin C + \sin A)$$

$$= 2\sin A\sin B\sin C + (\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)(\sin A + \sin B + \sin C) - 3\sin A\sin B\sin C$$

$$= (\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)(\sin A + \sin B + \sin C) - \sin A\sin B\sin C$$

$$= \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} . \frac{p}{R} - \frac{pr}{2R^2} = \frac{p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right)}{4R^3} .$$

Như vậy các hệ thức 1–6 được chứng minh.

Lập luận tương tự bằng cách sử dụng bổ đề 3 suy ra tính đúng đắn của các hệ thức 7–11.

Theo bổ đề 4, thì $\frac{1}{\sin A}, \frac{1}{\sin B}, \frac{1}{\sin C}$ là các nghiệm của phương trình

$$2prx^2 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4Rpx - 4R^2 = 0.$$

Vì thế theo định lí Viet cho phương trình này, ta có:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr};$$

$$\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} = \frac{4Rp}{2pr} = \frac{2R}{r};$$

$$\frac{1}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{4R^2}{2pr} = \frac{2R^2}{pr}.$$

Vì $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr}\right)^2 - \frac{4R}{r} = \frac{\left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr}\right)^2 - 16p^2Rr}{4p^2r^2}.$$

Ta có:

$$\frac{\sin A \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C \sin A}{\sin B}$$

$$= (\sin A + \sin B + \sin C)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) - 3$$

$$= \frac{p}{R} . \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr} - 3 = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr} - 3 = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2pr}$$

Vậy các hệ thức 12 – 15 được chứng minh.

Bằng lập luận tương tự (sử dụng bổ đề 5) suy ra các hệ thức 16 – 20 cùng được chứng minh.

Theo bổ đề 6 thì $\sin^2\frac{A}{2}, \sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0.$$

Áp dụng định lí Viet cho phương trình trên, ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{8R(2R - r)}{16R^2} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = \frac{r^2}{16R^2}.$$

Ta có:

$$\sin^4\frac{A}{2} + \sin^4\frac{B}{2} + \sin^4\frac{C}{2}$$

$$= \left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)^2 - 2\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2R - r}{2R}\right)^2 - \frac{p^2 - r^2 - 8Rr}{8R^2} = \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{8R^2}.$$

Như thế các hệ thức 21 – 23 được chứng minh.

Lập luận tương tự (bằng cách sử dụng bổ đề 7), thì các hệ thức 24 – 26 cũng được chứng minh.

Dùng bổ đề 8, 9 và kết hợp định lí Viet suy ra các hệ thức 27 – 32 được chứng minh.

Theo bổ đề 10 cotA, cotB, cotC là các nghiệm của phương trình

$$2prx^3 - (p^2 - r^2 - 4Rr)x^2 + 2prx + (2R + r)^2 - p^2 = 0.$$

Áp dụng định lí Viet cho phương trình bậc ba này, ta đi đến

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr}$$

$$\cot A \cot B \cot C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr^2}.$$

(Lưu ý rằng hệ thức hiển nhiên

$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$, ở đây cũng được kiểm tra lại)

Thật vậy theo định lí Viet thì

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = \frac{2pr}{2pr} = 1$$

Ta thấy:

$$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C$$

$$= (\cot A + \cot B + \cot C)^2 - 2(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)$$

$$= \frac{\left(p^2-r^2-4Rr\right)^2}{4p^2r^2} - 2.$$

Do (cotA + cotB)(cotB + cotC)(cotC + cotA)

= (cotAcotB + cotBcotC + cotCcotA)(cotA + cotB + cotC) − cotAcotBcotC,

do áp dụng kết quả trên đi đến

(cotA + cotB)(cotB + cotC)(cotC + cotA)

$$= \frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr} - \frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr} = \frac{4R^2}{2pr} = \frac{2R^2}{pr}.$$

Sử dụng các hằng đẳng thức quen biết, ta thấy

$\cot^3A + \cot^3B + \cot^3C = (\cot A + \cot B + \cot C)^3$

$- 3(\cot A + \cot B + \cot C)(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A) + 3\cot A\cot B\cot C.$

Từ đó theo các tính toán trên suy ra

$$\cot^3A + \cot^3B + \cot^3C = \frac{\left(p^2-r^2-4Rr\right)^2}{8p^3r^3} - 3\frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr} + 3\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr}$$

$$= \frac{\left(p^2+r^2-4Rr\right)^3 - 12p^2r^2\left[p^2-r^2-4Rr-p^2+(2R+r)^2\right]}{9p^2r^3}$$

$$= \frac{\left(p^2+r^2-4Rr\right)^3 - 48p^2R^2r^2}{8p^2r^3}$$

Vậy các hệ thức 34 – 41 được chứng minh.

Theo bổ đề 12 thì $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$px^3 - (4R+r)x^2 + px - r = 0$$

Áp dụng định lí Viet cho phương trình bậc ba nói trên ta thu được

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p},$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p}$$

(Dĩ nhiên hệ thức $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$ được nghiệm lại), từ đẳng thức ta có:

$$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2}$$

$$= \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 - 2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 - 2 = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2}$$

$$\tan^3\frac{A}{2} + \tan^3\frac{B}{2} + \tan^3\frac{C}{2} = \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^3$$

$$-3\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) + 3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$= \frac{(4R+r)^3}{p^3} - 3\frac{4R+r}{p} + 3\frac{r}{p} = \frac{(4R+r)^3 - 3p^2(4R+r-r)}{p^3}$$

$$= \frac{(4R+r)^3 - 12p^2R}{p^3}$$

Như thế hệ thức 42 được chứng minh.

Áp dụng bổ đề 13 và định lí Viet cùng các tính toán tương tự như trên ta thấy các hệ thức 43 – 46 được chứng minh.

Các hệ thức 47 – 75 còn lại được chứng minh một cách hoàn toàn tương tự bằng cách kết hợp định lí Viet cho phương trình bậc ba với việc đồng thời sử dụng các bổ đề 14 – 16 tương ứng.

Sau hết xét hệ thức

$$l_al_bl_c = \frac{16Rr^2p^2}{p^2+2Rr+r^2}$$

Áp dụng công thức tính đường phân giác trong ta có:

$$l_al_bl_c = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\cdot\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}\cdot\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b} = \frac{8(abc)^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$= \frac{8(abc)^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}. \quad (*)$$

Theo bổ đề 1: a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2+r^2+4Rr)x - 4pRr \text{ nên } \begin{cases} a+b+c = 2p \text{ hiển nhiên.} \\ ab+bc+ca = p^2+r^2+4Rr \\ abc = 4pRr \end{cases}$$

Ngoài ra theo các hệ thức trên, ta có:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{p}{4R}$$

Vì thế thay vào (*) đi đến

$$l_a l_b l_c=\frac{8.16Rr^2p^2.\frac{p}{4R}}{2p(p^2+r^2+4Rr)-4pRr}=\frac{16Rr^2p^2}{p^2+2Rr+r^2}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán phụ trợ giải hoàn toàn.

Bình luận:

Hơn 70 hệ thức lượng trong bài toán trên được trình bày nhất quán theo hai quan điểm sau:

1. Vế phải của các hệ thức này đều là các biểu thức của ba đại lượng cơ bản p, r, R.
2. Cách chứng minh của nó đều dựa trên định lí Viet đối với phương trình bậc ba (dĩ nhiên phải kết hợp với các bổ đề thích hợp với các phép biến đổi sơ cấp về lượng giác).

- Do dựa vào định lí Viet nên các hệ thức nói trên thuộc vào một chủng loại (hiểu theo nghĩa vế trái của nó đều có các dạng tương tự như x + y + z, xy + yx + yz, xyz hoặc các tổ hợp đơn thuần từ ba biểu thức cơ bản trên). Như thế có thể xem như 76 hệ thức này chỉ là một phần nhỏ bé của kho tàng vô tận các hệ thức lượng giác trong tam giác.
- Cũng chính vì chủ định muốn thông qua ba yếu tố cơ bản p, r, R để biểu diễn các hệ thức lượng trong tam giác, nên vế phải của nó dĩ nhiên không phong phú đa dạng như nhiều hệ thức lượng giác khác.

Thí dụ như ta rất hay sử dụng hệ thức

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, còn ở đây $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}$.

(dĩ nhiên $\frac{p}{R}=\dfrac{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{R}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$)

Vì thế 76 hệ thức nói trên có ý nghĩa trong một chừng mực nhất định mà thôi! Tuy nhiên từ các hệ thức đó cũng đủ cho ta một nguồn cảm hứng khi khảo sát các hệ thức lượng trong tam giác. Nó cũng cho ta một phương hướng để sáng tạo ra nhiều hệ thức lượng giác mới.

---

§ 2. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN

Nội dung của bài toán trong mục này có dạng như sau:

Cho tam giác ABC thỏa mãn một điều kiện nào đó (các điều kiện này có thể ra dưới dạng hệ thức đại số, hệ thức lượng giác, dạng hình học,...), bài toán đòi hỏi chứng minh tam giác này cũng thỏa mãn thêm một điều kiện khác nữa.

A. Điều kiện cho dưới dạng hệ thức đại số hoặc hệ thức lượng giác.

Bài 1. Chứng minh rằng trong một tam giác ABC hai điều kiện sau là tương đương:

$2\sin^2A=\tan B\tan C$ và $a^4=b^4+c^4$.

Giải

Ta sử dụng công thức trong mọi ΔABC thì:

$\cot B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S};\ \cot C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$, khi đó:

$$2\sin^2A=\tan B\tan C\Leftrightarrow 2\frac{4S^2}{b^2c^2}=\frac{4S}{a^2+c^2-b^2}.\frac{4S}{a^2-(c^2-b^2)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{b^2c^2}=\frac{2}{a^4-(c^2-b^2)^2}\Leftrightarrow 2b^2c^2=a^4-c^4-b^4+2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^4=b^4+c^4\Rightarrow\text{đpcm.}$$

Bài 2. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}\neq 1$.

Chứng minh rằng 2cotA = cotB + cotC.

Giải

Từ giả thiết ta có: $\dfrac{c^2}{b^2}=\dfrac{m_b^2}{m_c^2}=\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{2a^2+2b^2-c^2}$

$\Rightarrow 2a^2c^2+2b^2c^2-c^4=2a^2b^2+2b^2c^2-b^4$

$\Rightarrow 2a^2(c^2-b^2)=(c^2-b^2)(c^2+b^2).\quad(1)$

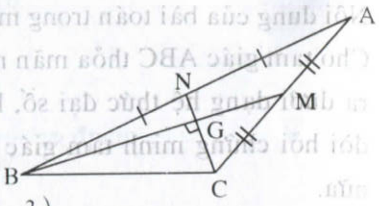
Do $\frac{c}{b}\neq 1\Rightarrow c^2-b^2\neq 0$, nên từ (1) có: $b^2+c^2=2a^2$.

hay $2\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

$\Rightarrow$ 2cotA = cotB + cotC $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 3. Chứng minh rằng trong tam giác ABC: cotA = 2(cotB + cotC) là điều kiện cần và đủ để hai đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau.

Giải



Giả sử hai trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G.

Ta có:

cotA = 2(cotB + cotC)

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} = 2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}\right)$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2 = 5a^2. \qquad (1)$$

Mặt khác: $BM \perp CN \Leftrightarrow BC^2 = BG^2 + CG^2$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2}{4}\right)$$

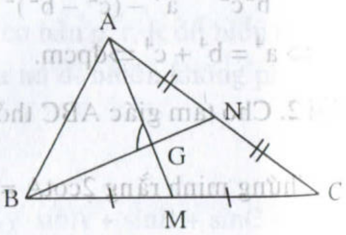
$$\Leftrightarrow b^2+c^2 = 5a^2. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Bài 4. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và giả sử $\widehat{AGB} + C = 180^0$.

Chứng minh: $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Giải



Do $\widehat{AGB} + C = 180^0$

$\Rightarrow \cot\widehat{AGB} = -\cot C$

$$\Rightarrow \frac{GA^2+GB^2-AB^2}{4S} = -\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}. \ (1)$$

Do $S_{GAB} = \frac{S}{3}$ và $GA^2 + GB^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2)$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{2b^2+2c^2-a^2+2c^2+2a^2-b^2}{4}\right)$$

$$= \frac{a^2+b^2+4c^2}{9}$$

nên thay vào (1) ta có: $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2+4c^2}{9} - c^2}{\dfrac{4S}{3}} = \dfrac{c^2-a^2-b^2}{4S}$.

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 5. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right).$$

Chứng minh: $\frac{1}{l_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Giải

Từ giả thiết, ta có:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{B+C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \qquad \left(\text{do } \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow l_a = \frac{bc}{b+c} \qquad \left(\text{do } l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{l_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Nhận xét: Bài toán trên thực chất có dạng:

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{l_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài 6. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

$$a + b = c + h_c \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} = 1.$$

Giải

Ta có: $a + b = c + h_c \Leftrightarrow \dfrac{a+b-c}{h_c} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2R(\sin A + \sin B - \sin C)}{a\sin B} = 1$$

(ta đã sử dụng công thức $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{ac\sin B}{c} = a\sin B$)

$$\Leftrightarrow \frac{2R(\sin A + \sin B - \sin C)}{2R\sin A\sin B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=1 \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=1 \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 7. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $\frac{\sin A+\sin B}{\sin 2A+\sin 2B}=\frac{\sin C}{\sin 2C}$.

Chứng minh: cosA + cosB = 1.

Giải

Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức, ta có:

$$\frac{\sin C}{\sin 2C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin 2A+\sin 2B}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin^2 C}$$

$$=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}. \quad (1)$$

Từ (1) có: $\frac{1}{2\cos C}=\frac{1}{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

$$\Rightarrow \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos C = 2\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow$ cosC = cosA + cosB − 1 + cosC

$\Rightarrow$ cosA + cosB = 1 $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 8. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}.$$

Chứng minh: $\left(A-\frac{\pi}{3}\right)\left(B-\frac{\pi}{3}\right)\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Giải

Từ giả thiết, ta có:

$$(\sin A-\sqrt{3}\cos A)+(\sin B-\sqrt{3}\cos B)+(\sin C-\sqrt{3}\cos C)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)+\left(\frac{1}{2}\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+\left(\frac{1}{2}\sin C-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=0. \quad (1)$$

Vì $\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi-C}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2}$, nên từ (1) có:

$$(1)\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\frac{A-B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{A-B}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c-\frac{\pi}{3}=0\\ \left[\begin{array}{l}\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{A-B}{2}\\ \frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{B-A}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C-\frac{\pi}{3}=0\\ C+B-A=\frac{\pi}{3}\\ C+A-B=\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C-\frac{\pi}{3}=0\\ A-\frac{\pi}{3}=0\\ B-\frac{\pi}{3}=0\end{array}\right.$$

Từ đó suy ra $\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\left(B-\frac{\pi}{3}\right)\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Bài 9.

1. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: sin5A + sin5B + sin5C = 0.
   Chứng minh rằng tam giác có ít nhất một góc bằng 36^0 hoặc 108^0.
2. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức sin3A + sin3B + sin3C = 0.
   Chứng minh rằng tam giác có ít nhất một góc bằng 60^0 hoặc 120^0.

Giải

1. Ta có: sin5A + sin5B + sin5C = 0

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5A+5B}{2}\cos\frac{5A-5B}{2}+2\sin\frac{5C}{2}\cos\frac{5C}{2}=0. \qquad (1)$$

Vì $\frac{5A+5B}{2}+\frac{5C}{2}=450^0=360^0+90^0$

$$\Rightarrow \sin\frac{5A+5B}{2}=\sin\left(90^0-\frac{5C}{2}\right)=\cos\frac{5C}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) và có:

$$\cos\frac{5C}{2}\cos\frac{5A-5B}{2}+\cos\frac{5C}{2}\cos\frac{5A+5B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{5C}{2}\left(\cos\frac{5A-5B}{2}+\cos\frac{5A+5B}{2}\right)=0.$$

Có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu $\cos\frac{5C}{2}=0$ (3)

Do $0<\frac{5C}{2}<450^0$, nên từ (3) có: $\left[\begin{array}{l}\frac{5C}{2}=90^0\\ \frac{5C}{2}=270^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C=36^0\\ C=108^0.\end{array}\right.$

2. Nếu $\cos\frac{5A+5B}{2}+\cos\frac{5A-5B}{2}=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=36^0 \text{ hoặc } A=108^0\\ B=36^0 \text{ hoặc } B=108^0.\end{array}\right.$$

Đó là đpcm.

2. Chứng minh hoàn toàn tương tự như phần 1/.

Bài 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện (1 + cotA)(1 + cotB) = 2.

Chứng minh: $C = 45^0$.

Giải

Từ giả thiết ta có: 1 + cotA + cotB + cotAcotB = 2

⇒ cotA + cotB + cotAcotB = 1

⇒ cotAcotB − 1 = −(cotA + cotB). (1)

Như đã biết trong mọi ΔABC, ta có cotA + cotB ≠ 0, nên từ (1) có:

$$\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-1$$

⇒ cot(a + B) = −1 (2)

Do $0 < A + B < 180^0$, nên từ (2) có:

$A + B = 135^0 \Rightarrow C = 45^0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 11. Cho tam giác ABC có điều kiện $S = a^2 - (b^2 - c^2)$.

Chứng minh rằng: $\tan A = \frac{8}{15}$

Giải

Áp dụng định lí hàm số cosin, ta có từ giả thiết:

$$\frac{1}{2}bc\sin A = b^2+c^2-2bc\cos A-b^2-c^2+2bc$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = 2bc(1-\cos A)$$

$$\Rightarrow bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}=4\sin\frac{A}{2}\quad\left(\text{do} \sin\frac{A}{2}\neq 0\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 12. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $m_a = c$

Chứng minh:

1. sinA = 2sin(B – C).
2. cotC = 3cotB.

Giải

1. Từ $m_a = c \Rightarrow m_a^2 = c^2$

$$\Rightarrow \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}=c^2$$

$$\Rightarrow 2(b^2-c^2)=a^2 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2(\sin^2B-\sin^2C)=\sin^2A$$

$$\Rightarrow (1-\cos 2B)-(1-\cos 2C)=\sin^2A$$

$$\Rightarrow \cos 2C-\cos 2B=\sin^2A$$

$$\Rightarrow -2\sin(C+B)\sin(C-B)=\sin^2A. \qquad (1)$$

Do sin(B + C) = sinA > 0, nên từ (1) suy ra sinA = 2sin(B − C) ⇒ đpcm.

2. Từ (*) ta có:

$$a^2+b^2-c^2=3(a^2+c^2-b^2)$$

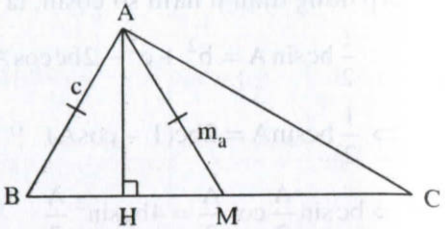
$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}=3\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}\Rightarrow \cot C=3\cot B\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Nhận xét:

1. Xét cách giải khác sau đây cho phần 2/.

Vì $m_a = c \Rightarrow AM = AB$ (ở đây AM là đường trung tuyến kẻ từ A), nên BAM là tam giác cân đỉnh A.

Kẻ $AH \perp BM \Rightarrow HM = HB$. (2)



Ta có:

$$\cot C = \frac{HC}{AH} \text{ và } \cot B = \frac{HB}{AH}$$

Từ (2) suy ra HC = 3HB,

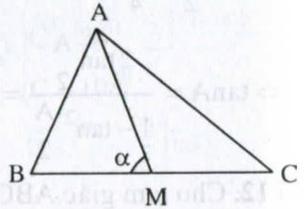
nên có ngay cotC = 3cotB ⇒ đpcm.

2. Phần 2 của bài toán là trường hợp riêng của bài toán sau:

Cho tam giác ABC với B > C. Vẽ trung tuyến AM. Đặt $\widehat{AMB} = \alpha$.

Chứng minh: $2\cot\alpha = \cot C - \cot B$.

Giải



Ta có: $\cot\alpha = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{4S_{ABM}} = \dfrac{m_a^2 + \frac{a^2}{4} - c^2}{2S}$

(do $S = 2S_{ABM}$)

$$= \frac{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - c^2}{2S} = \frac{b^2 - c^2}{4S}.$$

Từ đó: $2\cot\alpha = \dfrac{2b^2 - 2c^2}{4S} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} - \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} = \cot C - \cot B$

Khi AM = AB (tức $m_a = c$), ta có α = B, nên từ trên suy ra

$2\cot B = \cot C - \cot B \Rightarrow \cot C = 3\cot B$

Nhận xét được chứng minh.

3. Tương tự ta có bài toán sau: Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông và thỏa mãn hệ thức $m_c = R$. Chứng minh rằng:

$\tan A\tan B = -\dfrac{1}{3}$.

Từ $m_c = R \Rightarrow m_c^2 = R^2 \Rightarrow \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = R^2$

$\Rightarrow 2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C = 1$

$\Rightarrow 1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B - \sin^2 C = 1$

$\Rightarrow \cos^2 C - 2\cos(A + B)\cos(A - B) = 0$

$\Rightarrow \cos^2 C + 2\cos C\cos(A - B) = 0$

$\Rightarrow \cos C[\cos C + 2\cos(A - B)] = 0$

Do $\cos C \neq 0$ nên suy ra: $\cos C + 2\cos(A - B) = 0$

$\Rightarrow -\cos(A + B) + 2\cos(A - B) = 0$

$\Rightarrow -\cos A\cos B + \sin A\sin B + 2\cos A\cos B + 2\sin A\sin B = 0$

$\Rightarrow 3\sin A\sin B = -\cos A\cos B$

Do $\cos A\cos B \neq 0$, ta đi đến đpcm: $\tan A\tan B = -\dfrac{1}{3}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC với I, O tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Giả sử $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{4}$.

Giải

Áp dụng công thức $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$, nên từ giả thiết ta có:

$\dfrac{r}{4R} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{4}$

$\Rightarrow r + R = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow r^2 + 2Rr + R^2 = 2R^2$

$\Rightarrow r^2 = R^2 - 2Rr.$ (1)

Theo công thức Euler ta có: $R^2 - 2Rr = IO^2$, vậy từ (2) suy ra:

IO = r ⇒ đpcm.

Bài 14. Cho tam giác ABC không vuông tại A, tại B và thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 - c^2 = 4R^2$. Chứng minh: $\dfrac{\tan A\tan B + 1}{\tan A\tan B - 1} = \tan^2 C$.

Giải

Ta có: $a^2 + b^2 - c^2 = 4R^2$

⇔ $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 1$

⇔ $\sin^2 A + \sin^2 B = 1 + \sin^2 C$

⇔ $1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B = 2 + 2\sin^2 C$

⇔ $-\cos(A + B)\cos(A - B) = \sin^2 C$

⇔ $\cos C\cos(A - B) = \sin^2 C.$ (1)

Từ giả thiết suy ra $a^2 + b^2 - c^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow C$ là góc nhọn vậy $\cos C > 0$. Kết hợp với $\sin(A + B) = \sin C > 0$, nên sau khi chia cả hai vế của (1) cho $\cos C\sin(A + B)$, ta có:

$$\frac{\cos(A - B)}{\sin(A + B)} = \tan C$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A\cos B + \sin A\sin B}{\sin A\cos B + \sin B\cos A} = \tan C$$

$$\Rightarrow \frac{1+\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\tan C. \qquad (2)$$

Mặt khác ta có: $\tan A + \tan B = \tan C(\tan A\tan B - 1)$ (3)

(dựa vào $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$).

Từ (2) (3) đi đến: $\dfrac{1+\tan A\tan B}{\tan C(\tan A\tan B-1)}=\tan C$

$$\Rightarrow \frac{1+\tan A\tan B}{\tan A\tan B-1}=\tan^2 C \Rightarrow \text{đpcm.}$$

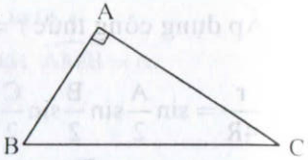
Nhận xét: Giả thiết tam giác ABC không vuông tại A hoặc B là cần thiết. Vì giả sử nếu $A = 90^0 \Rightarrow a = 2R \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 4R^2 + b^2 - c^2$

Lúc này nếu chọn ABC là tam giác vuông cân tại A.

Khi đó rõ ràng thỏa mãn điều kiện:

$a^2 + b^2 - c^2 = 4R^2$.

Tuy vậy lúc này tanA không có nghĩa, vì thế kết luận của bài toán là không đúng.



Bài 15. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: $\tan A\tan C = 3$ và $\tan B\tan C = 6$. Chứng minh rằng khi đó ta có: $\tan C = \tan A + \tan B$.

Giải

Từ $\tan A\tan C = 3 \Rightarrow \tan C = \dfrac{3}{\tan A}$, (1)

$\tan B\tan C = 6 \Rightarrow \tan B = \dfrac{6}{\tan C}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\tan B = 2\tan A$. (3)

Áp dụng công thức

$$\tan A = -\tan(B+C) = \frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1} \text{ hay } \tan A = \frac{2\tan A+\dfrac{3}{\tan A}}{5}$$

$\Rightarrow 5\tan^2 A = 2\tan^2 A + 3$

$\Rightarrow \tan^2 A = 1$. (4)

Từ giả thiết suy ra tanA, tanB, tanC cùng dấu và do đó nó phải cùng dương (vì nếu tanA, tanB, tanC cùng âm thì A, B, C đều là góc tù mâu thuẫn với $A + B + C = 180^0$)

Vì thế từ (1) có: $\tan A = 1 \Rightarrow \tan C = 3$ và $\tan B = 2$.

Nói riêng ta có: $\tan C = \tan A + \tan B \Rightarrow$ đpcm.

Chú ý: Với bài toán này, không có mệnh đề đảo

Thật vậy xét ba góc $A, B, C \in (0; 180^0)$ sao cho $\tan A = \tan B = \sqrt{2}$

($\Rightarrow \tan A + \tan B = 2\sqrt{2}$) và $\tan C = 2\sqrt{2}$

Như vậy rõ ràng ta có: $\tan A + \tan B = \tan C$

Mặt khác: $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1} = -\tan(A+B)$ và theo cách xác định thì:

$$\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}=\tan C.$$

Từ đó $\tan C = -\tan(A + B) \Rightarrow A + B + C = 180^0$.

Như thế A, B, C là ba góc của một tam giác.

Trong tam giác này rõ ràng: $\tan A\tan C = \sqrt{2}.2\sqrt{2} = 4 \neq 3$,

$\tan B\tan C = 4 \neq 6$.

Nói cách khác từ:

$\tan B + \tan A = \tan C$ không thể suy ra $\tan A\tan C = 3$; $\tan B\tan C = 6$, tức là mệnh đề đảo nói chung không đúng.

Bài 16. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

Chứng minh: $\left(m_a - \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(m_b - \dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)\left(m_c - \dfrac{\sqrt{3}}{2}c\right) = 0$.

Giải

Từ giả thiết ta có: $m_a + m_b + m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b + \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$. (1)

Ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{(2b^2+2c^2-a^2)+(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)}{4}$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra:

$$m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a = \frac{1}{2}\left\{(m_a+m_b+m_c)^2 - (m_a^2+m_b^2+m_c^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right]^2 - \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}b.\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}c.\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}b. \qquad (3)$$

Bình phương hai vế của (3), ta có:

$$m_a^2m_b^2+m_b^2m_c^2+m_c^2m_a^2+2m_am_bm_c(m_a+m_b+m_c)$$
$$=\frac{9}{16}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+\frac{9}{8}abc(a+b+c). \qquad (*)$$

Mặt khác áp dụng công thức tính đường trung tuyến (sau khi rút gọn) ta có:

$$m_a^2m_b^2+m_b^2m_c^2+m_c^2m_a^2=\frac{9}{16}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2). \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) và kết hợp với (1) suy ra:

$$2m_am_bm_c(m_a+m_b+m_c)=\frac{9}{8}abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow m_am_bm_c=\frac{3\sqrt{3}}{8}abc$$

$$\Rightarrow m_am_bm_c=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right). \qquad (4)$$

Từ (1) (3) (4) và theo định lí Viet suy ra m_a, m_b, m_c và $\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}c$ cùng là ba nghiệm của một phương trình bậc ba.

Không giảm tổng quát có thể cho là $a \le b \le c \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a \le \frac{\sqrt{3}}{2}b \le \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Cũng từ $a \le b \le c \Rightarrow m_a \ge m_b \ge m_c$

Từ nhận xét trên suy ra: $m_c=\frac{\sqrt{3}}{2}a; m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}c; m_b=\frac{\sqrt{3}}{2}b$

$$\Rightarrow m_b-\frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \Rightarrow \left(m_a-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(m_b-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\left(m_c-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)=0 \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Nhận xét:

1. Chú ý rằng trong ΔABC, thì

$$m_a-\frac{\sqrt{3}}{2}a=0 \Leftrightarrow m_a^2=\frac{3}{4}a^2$$
$$\Leftrightarrow 4m_a^2=3a^2$$
$$\Leftrightarrow 2b^2+2c^2-a^2=3a^2$$
$$\Leftrightarrow b^2+c^2=2a^2$$
$$\Leftrightarrow \cot B+\cot C=2\cot A$$

Vậy bài toán đã cho có thể phát biểu lại dưới dạng sau đây:

Nếu như ΔABC thỏa mãn điều kiện

$$m_a+m_b+m_c=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c),$$

thì trong ΔABC ta cũng có hệ thức:

$$(\cot B+\cot C-2\cot A)(\cot A+\cot C-2\cot B)(\cot A+\cot B-2\cot C)=0.$$

2. Bây giờ ta hãy chỉ ra vài lớp tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$m_a+m_b+m_c=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

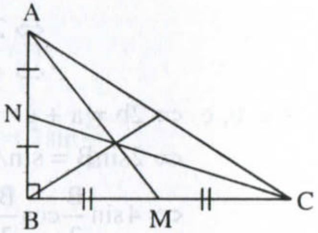
+ Lớp tam giác dễ thấy nhất đó là lớp tam giác đều ABC.

Thật vậy khi đó:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a;\ m_a+m_c+m_c=3m_a=3h_a=\frac{3\sqrt{3}}{2}a.$$

+ Bây giờ xét tam giác vuông ABC($B=90^0$) với BC = a và trung tuyến

$$AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Ta có: $c=AB=\sqrt{AM^2-BM^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$b=AC=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Từ đó:

$$a+b+c=a+\frac{a\sqrt{6}}{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}a(2+\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Ta có: $m_b=\frac{1}{2}b=\frac{a\sqrt{6}}{4};\ m_c=CN=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{8}}=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$

$$\Rightarrow m_a+m_b+m_c=\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{a\sqrt{6}}{4}+\frac{3\sqrt{2}a}{4}=\frac{1}{4}a(2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2})$$

Lại có: $\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)=\frac{\sqrt{3}}{2}a(2+\sqrt{6}+\sqrt{2})=\frac{1}{4}a(2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2})$

Từ đó suy ra lớp tam giác vuông cùng thỏa mãn hệ thức:

$$m_a+m_b+m_c=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

Bài 17. Chứng minh rằng trong tam giác ABC điều kiện a, b, c lập thành một cấp số cộng tương đương với một trong các điều kiện sau:

1. $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng. 5. $h_b=r_b$.
2. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$. 6. $h_b=3r$.
3. $\sin A\sin C=3\sin^2\frac{B}{2}$. 7. $S=\frac{2}{3}l_b^2\sin B$. 4. $\frac{h_b}{l_b}=\sqrt{\frac{2r}{R}}$.

Giải

1. $\div \cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = 2\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin B = 2\cos\frac{B}{2}\left[\cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin B = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} - 2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin B = \sin A + \sin C - \sin B$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B = \sin A + \sin C$$

$$\Leftrightarrow 2b = a + c$$

$$\Leftrightarrow \div\, a, b, c \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. $\div\, a, b, c \Leftrightarrow 2b = a + c$

$$\Leftrightarrow 2\sin B = \sin A + \sin C$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A-C}{2} \qquad \left(\text{do } \sin\frac{A+C}{2} = \cos\frac{B}{2} \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

3. $\sin A\sin B = 3\sin^2\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2R}\frac{b}{2R} = 3\frac{\sin^2 C}{2(1+\cos C)}$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{4R^2} = 3\frac{c^2}{4R^2.2\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$$

$$\Leftrightarrow ab = \frac{3c^2ab}{(a+b)^2-c^2}$$

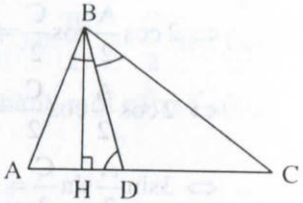
$$\Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3c^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 4c^2$$

$$\Leftrightarrow a + b = 2c \qquad (\text{do } a, b, c > 0)$$

$$\Leftrightarrow \div\, a, b, c.$$

4. $\frac{h_b}{l_b} = \sqrt{\frac{2r}{R}} \Leftrightarrow \sin\widehat{HDB} = \sqrt{\frac{2r}{R}}$



$$\Leftrightarrow \sin\left(C + \frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{2r}{R}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(C + \frac{B}{2}\right) = \frac{2r}{R}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{C-A}{2}\right) = \frac{8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{C-A}{2} = 4\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{C-A}{2} - \cos\frac{C+A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{C-A}{2} - 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2} + 4\sin^2\frac{B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{C-A}{2} - 2\sin\frac{B}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C-A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2} = 4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2} = 2\sin B \Leftrightarrow \sin C + \sin A = 2\sin B$$

$$\Leftrightarrow c + a = 2b$$

$$\Leftrightarrow \div\, a, b, c \Rightarrow \text{đpcm.}$$

5. Ta có: $h_b = r_b \Leftrightarrow 2R\sin A\sin C = p\tan\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow 2R\,4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{B}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \div\, a, b, c \qquad (\text{theo phần 2/}) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

6. $h_b = 3r \Leftrightarrow 2R\sin A\sin C = 3.4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow 2R.4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 12R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{B}{2} \Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow \div a, b, c$ (theo phần 2/) $\Rightarrow$ đpcm.

7. Ta có: $l_b = \dfrac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}$

$$\Rightarrow l_b^2 = \frac{4a^2c^2\cos^2\frac{B}{2}}{(a+c)^2} = \frac{2a^2c^2(1+\cos B)}{(a+c)^2}$$

$$= \frac{2a^2c^2}{(a+c)^2}\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = \frac{ac}{(a+c)^2}\left[(a+c)^2-b^2\right]$$

Vì thế: $\div a, b, c \Leftrightarrow a + c = 2b$

$$\Leftrightarrow l_b^2 = \frac{ac}{4b^2}(4b^2-b^2) \Leftrightarrow l_b^2 = \frac{3}{4} = ac$$

$$\Leftrightarrow l_b^2 = \frac{3}{4}\frac{2S}{\sin B} \Leftrightarrow S = \frac{2}{3}l_b^2\sin B \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ở đây ta dùng kí hiệu $\div a, b, c$ để chỉ a, b, c lập thành cấp số cộng theo thứ tự ấy.

Bài 18. Giả sử tam giác ABC có ba cạnh a, b, c theo thứ tự trên lập thành cấp số cộng với công sai d. Chứng minh $d = \frac{3}{2}r\left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)$.

Giải

Theo bài 17, ta có: $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

Ta có: $\dfrac{3r}{2}\left(\tan\dfrac{C}{2} - \tan\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{3}{2}4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}.\dfrac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$= 6R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2R\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2} = R(\sin C - \sin A)$$

$$= \frac{c-a}{2} = d \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 19. Chứng minh rằng trong tam giác ABC $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi cosA, cosB, cosC lập thành một cấp số cộng.

Giải

Ta có:

$$\div \tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2} = 2\tan\frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}} = 2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{B}{2} = 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos B = 2\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2} + \cos\frac{A-C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos B = 2\sin^2\frac{B}{2} + 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos B = 1 - \cos B + \cos A + \cos C$$

$$\Leftrightarrow 2\cos B = \cos A + \cos C$$

$$\Leftrightarrow \div \cos A, \cos B, \cos C.$$

Nhận xét:

1. Nếu chấp nhận cấp số cộng với công sai d = 0, thì có thể lấy ABC là tam giác đều. Đó là tam giác thỏa mãn yêu cầu đề bài.
2. Xét một thí dụ với tam giác ABC trong đó $\div$ cosA, cosB, cosC là cấp số cộng với $d \neq 0$.

Xét ΔABC với $A = 90^0$. Khi đó $\tan\frac{A}{2} = 1$ và cosA = 0.

Giả sử ta có: $\div \tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$.

Đặt $\tan\frac{B}{2} = x \Rightarrow \tan\frac{C}{2} = 2x - 1$

Do $\tan\frac{B}{2} > 0, \tan\frac{C}{2} > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$. Mặt khác vì B, C đều $< 90^0 \Rightarrow x < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$.

Theo trên ta có: cosA + cosC = 2cosB. (1)

Ta có: $\cos B = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; $\cos C = \dfrac{1-(2x-1)^2}{1+(2x-1)^2}$.

Vậy từ (1) có phương trình: $0 + \dfrac{1-(2x-1)^2}{1+(2x-1)^2} = 2.\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Sau khi tính toán và rút gọn ta có: $(x-1)^2(x^2+x-1) = 0$

Do $\dfrac{1}{2} < x < 1$ nên suy ra $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \cos B = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Vậy tam giác ABC vuông tại A với $B = \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ là tam giác thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Bài toán đặt ra là có ý nghĩa vì lớp các bài toán thỏa mãn các giả thiết nêu trong đầu bài là khác rỗng.

Bài 20. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, thì cotA, cotB, cotC lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $\cos B = \dfrac{b^2}{2ac}$.

Giải

Ta có:

÷cotA, cotB, cotC $\Leftrightarrow \cot A + \cot C = 2\cot B$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S} = 2\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$$

$$\Leftrightarrow a^2+c^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a^2+c^2-b^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{b^2}{2ac} \Leftrightarrow \cos B = \frac{b^2}{2ac}.$$

Nhận xét:

1. Lớp các ΔABC thỏa mãn điều kiện cotA, cotB, cotC lập thành cấp số cộng là khác rỗng. Thật vậy theo trên ta có:

   ÷cotA, cotB, cotC $\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$

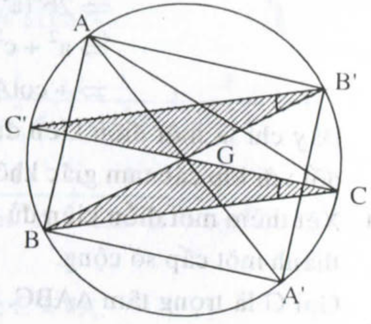
   Vì thế lấy $a = 4$, $b = \sqrt{10}$, $c = 2$. Do $a = \max\{a, b, c\}$ và $a < b + c$ nên có thể lấy a, b, c làm độ dài bc cạnh của ΔABC.

   Với tam giác này ta có: $a^2 + c^2 = 16 + 4 = 20 = 2b^2$.

2. Ta đưa thêm một điều kiện cần và đủ để có ÷cotA, cotB, cotC dưới dạng hình học như sau:

   Cho ABC là tam giác không cân đỉnh B. Ba đường trung tuyến kẻ từ A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tại A', B', C'.

   Khi đó ÷cotA, cotB, cotC $\Leftrightarrow$ B'A' = B'C'



Gọi G là trọng tâm ΔABC.

Ta có: ΔGB'C' ∽ Δ GCB, nên $\dfrac{C'B'}{BC} = \dfrac{B'G}{CG}$

Lại có ΔA'B'G ∽ ΔABG, nên $\dfrac{A'B'}{BA} = \dfrac{B'G}{AG}$

Từ đó suy ra: $B'A' = B'C' \Leftrightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{CG}$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\frac{2}{3}m_a}{\frac{2}{3}m_c}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_a}{m_c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{2a^2+2b^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2(c^2-a^2) = c^4 - a^4$$

$$\Leftrightarrow 2b^2(c^2-a^2) = (c^2-a^2)(c^2+a^2) \qquad (1)$$

Do ABC không phải là tam giác cân đỉnh B nên $c \neq a \Rightarrow c^2 - a^2 \neq 0$, nên từ (1) có:

$$B'A' = B'C' \Leftrightarrow 2b^2 = c^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow \cot A + \cot C = 2\cot B.$$

3. Thêm một tiêu chuẩn hình học nữa để cotA, cotB, cotC lập thành một cấp số cộng:

   Xét lớp các tam giác ABC không phải cân tại B.

   Khi đó cotA, cotB, cotC lập thành một cấp số cộng nếu như tam giác ABC đồng dạng với tam giác mà ba cạnh là ba trung tuyến của tam giác ấy.

   Giả sử $a \le b \le c \Rightarrow m_a \ge m_b \ge m_c$ (điều này suy ra từ lập luận sau đây:

   Ta có: $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + (3b^2 - 3a^2)$

   $\Rightarrow 4m_a^2 = 4m_b^2 + 3(b^2 - a^2) \qquad (*)$

   Nếu $a \le b$, thì từ (*) suy ra $m_a^2 \ge m_b^2 \Rightarrow m_a \ge m_b$)

   Gọi T là tam giác có ba cạnh là ba trung tuyến của ΔABC.

   Ta có: $\Delta ABC \backsim T \Leftrightarrow \dfrac{m_a}{m_b} = \dfrac{c}{b}$ và $\dfrac{m_a}{m_c} = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{2a^2+2c^2-b^2} = \dfrac{c^2}{b^2} \\ \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{2a^2+2b^2-c^2} = \dfrac{c^2}{a^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2a^2+2b^2-c^2}{2a^2+2c^2-b^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow 2b^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)(a^2+c^2)$$

$$\Rightarrow a^2+c^2=2b^2$$

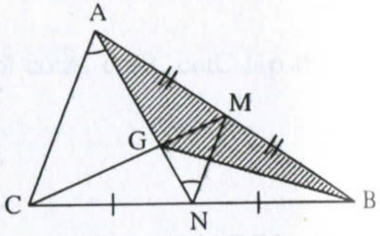
$$\Rightarrow \div \cot A, \cot B, \cot C.$$

Đây chỉ là một điều kiện đủ để cotA, cotB, cotC lập thành một cấp số cộng đối với lớp các tam giác không cân đỉnh B.

4. Xét thêm một điều kiện đủ nữa (dưới dạng hình học) để cotA, cotB, cotC lập thành một cấp số cộng.

Gọi G là trọng tâm ΔABC. Khi đó nếu như AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAGB thì cotA, cotB, cotC lập thành một cấp số cộng.

Gọi G là trọng tâm ΔABC. Khi đó nếu như AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAGB thì cotA, cotB, cotC lập thành một cấp số cộng.



Do AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAGB, nên có:

$\widehat{CAG}=\widehat{ABG}$

Vì MN // AC ⇒ $\widehat{CAG}=\widehat{GNM}$

Từ đó suy ra $\widehat{ABG}=\widehat{GNM}$ ⇒ NGMB là tứ giác nội tiếp.

Vì thế ta có: $\begin{cases} AG.AN = AM.AB \\ CN.CB = CG.CM \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}m_a.m_a=\frac{c}{2}.c \\ \frac{2}{3}m_c.m_c=\frac{a}{2}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m_a^2=3c^2 \\ 4m_c^2=3a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b^2+2c^2-a^2=3c^2 \\ 2b^2+2c^2-c^2=3a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b^2=a^2+c^2$$

$$\Rightarrow \cot A+\cot C=2\cot B$$

$$\Rightarrow \div \cot A, \cot B, \cot C.$$

Bài 21. Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C lập thành cấp số nhân với công bội q = 2. Chứng minh:

1. $h_a = h_b + h_c$.
2. $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$.
3. $OH = R\sqrt{2}$, ở đây O, H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC.
4. $bc = a(b + c)$; $bc = c^2 - a^2$.
5. $\cos A\cos B\cos C = -\frac{1}{8}$.

6. $\sin A\sin B\sin C=\frac{\sqrt{7}}{8}$.
7. $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\frac{5}{4}$.
8. $\cos A+\cos B+\cos C=\frac{b}{a}-\frac{1}{2}$.
9. $l_a=2a\cos\frac{A}{2}$.
10. $\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos B}-\frac{1}{\cos C}=4$.
11. $\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}+\frac{1}{\sin^2C}=8$.
12. $\sqrt[3]{\cos B}+\sqrt[3]{\cos C}-\sqrt[3]{\cos A}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$.
13. $\frac{1}{\cos^4A}+\frac{1}{\cos^4B}+\frac{1}{\cos^4C}=416$.

Giải

Từ ÷ A, B, C với công bội q = 2, ta có: B = 2A; C = 4A.

Do đó $A + B + C = 7A = \pi \Rightarrow A=\frac{\pi}{7}, B=\frac{2\pi}{7}, C=\frac{4\pi}{7}$

1. $h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{2S}{a}=\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}. \qquad (1)$$

Ta có: $VP(1)=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7}}$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} \quad \left(\text{do } \sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=VT(1) \Rightarrow (1) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2 \Leftrightarrow 4R^2(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C) = 7R^2$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos2A + 1 - \cos2B + 1 - \cos2C) = 7$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$\left(\text{do } \cos\frac{8\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

Đặt $S = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

$\Rightarrow 2S\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

$\Rightarrow 2S\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}$

$\Rightarrow 2S\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow S = -\frac{1}{2}$.

Vậy (2) đúng ⇒ đpcm.

3. Ta có: $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy từ phần 2/ suy ra $OH^2 = 2R^2 \Rightarrow OH = R\sqrt{2}$ ⇒ đpcm.

4. $bc = a(b + c) \Leftrightarrow \sin B\sin C = \sin A(\sin B + \sin C)$

$\Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\quad\left(\text{do } \sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7} \neq 0\right)$.

Từ đó suy ra đpcm.

Đẳng thức $bc = c^2 - a^2$ chứng minh tương tự.

5. $\cos A\cos B\cos C = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$

$\Leftrightarrow 4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$ (*)

Vì (*) đúng $\left(\text{do } \frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}\right)$ ⇒ đpcm.

6. Ta nhận thấy $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$\cos^2 4x = \cos^2 3x$. (3)

Đặt $y = \cos^2 x > 0$ thì (3) có dạng: $(8y^2 - 8y + 1)^2 = y(4y - 3)^2$

$\Rightarrow 64(y - 1)\left(y^3 - \frac{5}{4}y^2 + \frac{3}{8}y - \frac{1}{64}\right) = 0$

Do $\cos^2\frac{\pi}{7}, \cos^2\frac{2\pi}{7}, \cos^2\frac{3\pi}{7}$ khác nhau và khác 1, nên suy ra $\cos^2\frac{\pi}{7}, \cos^2\frac{2\pi}{7}$, $\cos^2\frac{3\pi}{7}$ là ba nghiệm của phương trình: $y^3 - \frac{5}{4}y^2 + \frac{3}{8}y - \frac{1}{64} = 0$. (4)

Ta có: $\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{4\pi}{7} = \left(1 - \cos^2\frac{\pi}{7}\right)\left(1 - \cos^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(1 - \cos^2\frac{4\pi}{7}\right)$

$= 1 - \left(\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7}\right) + \left(\cos^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{4\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}\right)$

$- \cos^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{4\pi}{7}$. (5)

Theo định lí Viet với (4) suy ra:

$\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{4\pi}{7} = 1 - \frac{5}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$. (6)

Do $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} > 0$, nên từ (6) có:

$\sin A\sin B\sin C = \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$ ⇒ đpcm.

7. Ta có: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7} = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 1 + \cos\frac{2\pi}{7} + 1 + \cos\frac{4\pi}{7} + 1 + \cos\frac{8\pi}{7} = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

Từ (2) suy ra đpcm.

8. $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{b}{a} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} = 2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Từ (2) suy ra đpcm.

9. Vì $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$, nên

$$l_a = 2a\cos\frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = 2a\cos\frac{A}{2} \Leftrightarrow bc = a(b+c).$$

10. $\dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{1}{\cos B} - \dfrac{1}{\cos C} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} - \dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} - \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = 4. \quad (7)$$

Vì $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ nằm trong số các nghiệm của phương trình:

$3x + 4x = (2k+1)\pi$, với $k \in Z$, từ đó suy ra $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ thỏa mãn phương trình

$\cos 3x + \cos 4x = 0.$ (8)

Ta có (8) $\Leftrightarrow (\cos x + 1)(8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0.$ (9)

Vì $\cos x + 1 \neq 0$ khi $x = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$, nên ta có:

$\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ là ba nghiệm phân biệt của phương trình bậc ba

$8y^3 - 4y^2 - 4y + 1 = 0.$ (10)

Ta thấy:

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = \frac{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}}. \quad (11)$$

Theo định lí Viet với (10), nên thay vào (11) ta đi đến:

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = \frac{-\frac{4}{8}}{-\frac{1}{8}} = 4.$$

Vậy (7) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

11. Ta có: $\dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C} = 8$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{4\pi}{7}} = 8$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \cot^2\frac{\pi}{7}\right) + \left(1 + \cot^2\frac{2\pi}{7}\right) + \left(1 + \cot^2\frac{4\pi}{7}\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \left(\cot^2\frac{\pi}{7} - 1\right) + \left(\cot^2\frac{2\pi}{7} - 1\right) + \left(\cot^2\frac{4\pi}{7} - 1\right) = 2. \quad (12)$$

Áp dụng công thức: $\cot^2\alpha - 1 = 2\cot\alpha\cot 2\alpha$, ta có:

$$(12) \Leftrightarrow \cot\frac{\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7} + \cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7} + \cot\frac{4\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7} = 1 \quad (13)$$

Vì $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = 1$, nên (13) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

(ở đây đã sử dụng: Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha = 1$).

12. Ta có:

$$\sqrt[3]{\cos B} + \sqrt[3]{\cos C} - \sqrt[3]{\cos A} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}} \quad (14)$$

$$\left(\text{do } \cos A = \cos\frac{\pi}{7} = -\cos\frac{8\pi}{7}\right).$$

Ta thấy: $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}$ thỏa mãn phương trình: $\cos 4x = \cos 3x$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1) = 0.$ (15)

Do $\cos x - 1 \neq 0$ khi $x = \frac{2\pi}{7}, x = \frac{4\pi}{7}, x = \frac{8\pi}{7}$ nên $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{8\pi}{7}$ là ba nghiệm phân biệt của phương trình: $8y^3 + 4y^2 - 4y - 1 = 0.$ (16)

hay $2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7}, 2\cos\frac{8\pi}{7}$ là ba nghiệm phân biệt của phương trình:

$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0.$ (17)

Đặt $P = \sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}}$

$$Q = \sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}.\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}}\sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}}\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}$$

Khi đó từ định lí Viet với (17) có thể thấy:

$P^3 = -4 + 3PQ,$

$Q^3 = -5 + 3PQ.$

Từ đó $(PQ)^3 = (3PQ - 4)(3PQ - 5)$

$\Rightarrow (PQ - 3)^3 + 7 = 0 \Rightarrow PQ = 3 - \sqrt[3]{7}.$

Từ các hệ thức trên đi đến: $P^3 = 5 - 3\sqrt[3]{7} \Rightarrow P = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}.$

Dễ thấy $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\frac{P}{\sqrt[3]{2}}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}} \Rightarrow$ đpcm.

13. Ta có: $\frac{1}{\cos^4 A}+\frac{1}{\cos^4 B}+\frac{1}{\cos^4 C}=416$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^4\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^4\frac{4\pi}{7}}=416.$ (18)

Từ nhận xét: $\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7}$ thỏa mãn phương trình $\cos^2 4x=\cos^2 3x$, nên lập luận như trên suy ra: $y_1=\cos^2\frac{\pi}{7}, y_2=\cos^2\frac{2\pi}{7}, y_3=\cos^2\frac{3\pi}{7}$ là ba nghiệm phân biệt của phương trình:

$64y^3-80y^3+24y-1=0$ (19)

Ta có: $\text{VT}(18)=\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\frac{1}{y_3^2}=\frac{y_1^2y_2^2+y_2^2y_3^2+y_3^2y_1^2}{(y_1y_2y_3)^2}$

$=\frac{(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)^2-2y_1y_2y_3(y_1+y_2+y_3)}{(y_1y_2y_3)^2}$ (20)

Áp dụng định lí Viet với (19) và thay vào (20) ta có:

$\text{VT}(18)=24^2-160=416 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 22. Cho tam giác ABC và x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác T nào đó. Giả sử $\frac{\cos A}{x}+\frac{\cos B}{y}+\frac{\cos C}{z}=\frac{x}{2yz}+\frac{y}{2zx}+\frac{z}{2xy}$.

Chứng minh rằng ΔABC ∽ ΔT.

Giải

Từ giả thiết suy ra: $x^2+y^2+z^2-2yz\cos A-2xz\cos B-2xy\cos C=0$

$\Leftrightarrow x^2(\sin^2 B+\cos^2 B)+y^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+z^2-2yz\cos A-2xz\cos B+2xy\cos(A+B)=0$

$\Leftrightarrow (x^2\cos^2 B+y^2\cos^2 A+2xy\cos A\cos B)+(x^2\sin^2 B+y^2\sin^2 A-2xy\sin A\sin B)+z^2-2z(y\cos A+x\cos B)=0$

$\Leftrightarrow (x\cos B+y\cos A)^2+(x\sin B-y\sin A)^2+z^2-2z(x\cos B+y\sin A)=0$

$\Leftrightarrow (x\cos B+y\cos A)^2+(x\sin B-y\sin A)^2+z^2-2z(x\cos B+y\sin A)=0$

$\Leftrightarrow (x\cos B+y\cos A-z)^2+(x\sin B-y\sin A)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\cos B+y\cos A-z=0 & (1)\\ x\sin B-y\sin A=0 & (2)\end{cases}$

Từ (2) có: $x=\frac{y\sin A}{\sin B}$. Thay vào (1) có: $\frac{y\sin A\cos B}{\sin B}+y\cos A=z$

$\Rightarrow y\sin(A+B)=z\sin B \Rightarrow y=\frac{z\sin B}{\sin C}$.

Từ đó dễ thấy $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$, tức là ΔABC ∽ tam giác T ⇒ đpcm

Nhận xét: Từ bài trên suy ra nhiều bài toán cụ thể khác:

Thí dụ 1. Cho ΔABC có: $\frac{\cos A}{4}+\frac{\cos B}{5}+\frac{\cos C}{6}=\frac{77}{240}$.

Chứng minh rằng $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$.

Thật vậy, viết lại giả thiết dưới dạng sau:

$\frac{\cos A}{4}+\frac{\cos B}{5}+\frac{\cos C}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5.6}+\frac{5}{6.4}+\frac{6}{4.5}\right)$

Theo bài trên suy ra ΔABC ∽ tam giác T, ở đây T là tam giác có ba cạnh là 4, 5, 6. Do 4, 5, 6 lập thành cấp số cộng nên từ đó suy ra đpcm.

Thí dụ 2. Vẫn với giả thiết trên chứng minh C = 2A.

Thật vậy ΔABC ∽ tam giác $A_1B_1C_1$ có ba cạnh 4, 5, 6. Do $6^2=4(4+5)$, nên theo bài suy ra $C_1=2A_1 \Rightarrow C=2A \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 3. Vẫn với giả thiết trên, chứng minh $\tan\frac{A}{2}\tan A=\frac{1}{3}$.

(áp dụng thí dụ 1 và thí dụ 2).

Bài 23. (Tam giác với điều kiện a + c = 2b)

Chứng minh rằng để tam giác ABC có tính chất a + c = 2b điều kiện cần và đủ là thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

1. $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A=\frac{r(11R-4r)}{2R^2}$.
2. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{r}{R^2}(7R-5r)$.
3. $\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C=\frac{3rp}{R^3}(R-r)$.
4. $(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)=\frac{pr}{R^3}(5R-2r)$.
5. $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{p}(11R-4r)$.

6. $\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \dfrac{1}{2R^2}(9Rr - 4r^2 - 2R^2)$.

7. $\cos A\cos B\cos C = \dfrac{1}{2R^{2-5r^2}}(7Rr - 2Rh2)$.

8. $\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C = \dfrac{1}{R^2}\left(3R^2 - 7Rr + 5r^2\right)$.

9. $\cos^3 A\cos^3 B\cos^3 C = \dfrac{1}{R^3}\left(R^3 + 3R^2 r - 12Rr^2 - 7r^3\right)$.

10. $(\cos A + \cos B)(\cos B + \cos C)(\cos C + \cos A) = \dfrac{r^2}{R^3}(5R - 2r)$.

11. $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{1}{p}(7R - 5r)$.

12. $\cot A\cot B\cot C = \dfrac{1}{p^2}\left(7Rr - 5r^2 - 2R^2\right)$.

13. $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = \dfrac{1}{p^2}(7R - 5r)^2 - 2$.

14. $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2\dfrac{B}{2} + \tan^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{16R^2 - 28Rr + 19r^2}{9r(2R - r)}$.

15. $\cot^2\dfrac{A}{2} + \cot^2\dfrac{B}{2} + \cot^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{r}(10R - 11r)$.

16. $\cot^3\dfrac{A}{2} + \cot^3\dfrac{B}{2} + \cot^3\dfrac{C}{2} = \dfrac{3pr}{r^3}(2R - 3r)$.

17. $\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{r(5R - 4r)}{8R^2}$.

18. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \dfrac{1}{R^2}\left(3R^2 - 14Rr + 10r^2\right)$.

19. $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = 9r(2R - r)$.

20. $r_a r_b r_c = 9r^2(2R - r)$.

21. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3r(7R - 5r)$.

22. $l_a l_b l_c = \dfrac{36Rr^2(2R - r)}{5R - 2r}$.

23. $\cot\omega = \dfrac{7R - 5r}{p}$, ở đây ω là góc Broca của ΔABC.

Giải

Trước hết ta cần đến mệnh đề sau:

Mệnh đề bổ trợ: Trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$r(2R - r) - \frac{p^2}{9} = \frac{1}{18p}(b + c - 2a)(a + c - 2b)(a + b - 2c)$$

Mệnh đề này được chứng minh lần đầu tiên bởi nhà toán học P.Nuesch vào năm 1971 trong tạp chí "Elementary.Math" N^{0}26, 1971 trang 19. Bạn đọc tự nghiệm lại xem sao!

Từ mệnh đề trên suy ra: Trong tam giác ABC thì $a + c = 2b \Leftrightarrow r(2R - r) = \dfrac{p^2}{9}$

Bây giờ ta giải bài toán của chúng ta.

1. Theo bài toán phụ trợ, ta có:

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{2R^2}$$

Vì thế $\quad \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \dfrac{r(11R - 4r)}{2R^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4R^2} = \frac{r(11R - 4r)}{2R^2}$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 4Rr + r^2 = 22Rr - 8r^2 \Leftrightarrow p^2 = 18Rr - 9r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{9} = r(2R - r)$$

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow$ đpcm.

2. Theo bài toán phụ trợ ta có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2}$$

Từ đó ta có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{r(7R - 5r)}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2} = \frac{r(7R - 5r)}{R^2} \Leftrightarrow p^2 - 4Rr - r^2 = 14Rr - 10r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{9} = 2Rr - r^2$$

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow$ đpcm.

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 chứng minh tương tự 1, 2. Bạn đọc tự nghiệm lại!

11. Theo bài toán phụ trợ, ta có:

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr}$$

Vậy $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{7R - 5r}{p}$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} = \frac{7R - 5r}{p} \Leftrightarrow p^2 - r^2 - 4Rr = 14Rr - 10r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{9} = 2Rr - r^2$$

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow$ đpcm.

12. Theo bài toán phụ trợ, thì

$\cot A\cot B\cot C = \dfrac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr}$. Do đó

$$\cot A\cot B\cot C = \frac{1}{p^2}\left(7Rr - 5r^2 - 2R^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr} = \frac{7Rr - 5r^2 - 2R^2}{pr}$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4R^2 - r^2 - 4Rr = 14Rr - 10r^2 - 4R^2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{9} = 2Rr - r^2$$

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow$ đpcm.

13, 14, 15, 16 chứng minh trương tự như trên.

17. Theo bài toán phụ trợ, thì

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2}$$

Do vậy

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{r(5R - 4r)}{8R^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2} = \frac{r(5R - 4r)}{8R^2} \Leftrightarrow p^2 + r^2 - 8Rr = 10Rr - 8r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{9} = 2Rr - r^2$$

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow$ đpcm.

18. Theo bài toán phụ trợ, ta có:

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \dfrac{3R^2 + 4Rr + r^2 - p^2}{R^2}$. Vì thế

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \frac{1}{R^2}\left(3R^2 - 14Rr + 10r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 + 4Rr + r^2 - p^2 = 3R^2 - 14Rr + 10r^2$$

$$\Leftrightarrow 2Rr - r^2 = \frac{p^2}{9}$$

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow$ đpcm.

19. Theo bài toán phụ trợ, thì

$r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2$, vì thế

$$r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = 9r(2R - r)$$

$$\Leftrightarrow p^2 = 9r(2R - r) \Leftrightarrow \frac{p^2}{9} = 2Rr - r^2$$

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow$ đpcm.

20. Chứng minh như 19.

21. Ta có: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3r(7R - 5r)$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4} = 3r(7R - 5r)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{r(7R - 5r)}{R^2}$$

Theo phần 2/ suy ra đpcm.

22. Theo bài toán phụ trợ, thì

$l_al_bl_c = \dfrac{16Rr^2p^2}{p^2 + 2Rr + r^2}$, vậy

$$l_al_bl_c = \frac{36Rr^2(2R - r)}{5R - 2r} \Leftrightarrow \frac{16Rr^2p^2}{p^2 + 2Rr + r^2} = \frac{36Rr^2(2R - r)}{5R - 2r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4p^2}{p^2 + 2Rr + r^2} = \frac{9(2R - r)}{5R - 2r} \Leftrightarrow \frac{p^2 + 2Rr + r^2}{p^2} = \frac{20R - 8r}{18R - 9r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2Rr + r^2}{p^2} = \frac{20R - 8R}{18R - 9r} - 1 \Leftrightarrow \frac{2Rr + r^2}{p^2} = \frac{2R + r}{18R - 9r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{p^2} = \frac{1}{18R - 9r} \Leftrightarrow \frac{p^2}{9} = 2Rr - r^2$$

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Rightarrow$ đpcm.

23. Theo định nghĩa góc Broca ω, ta có:

$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$

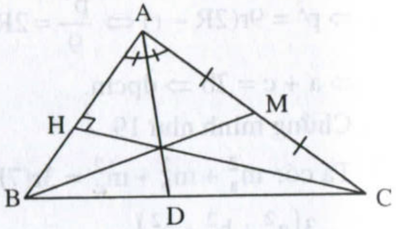
Vậy 23/ $\Leftrightarrow$ 11/ $\Rightarrow$ đpcm.

B. Điều kiện cho dưới dạng yếu tố hình học

Bài 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng đường phân giác trong AD, trung tuyến BM và đường cao CH đồng quy khi và chỉ khi hệ thức sau thỏa mãn:

$$\cos A=\frac{\sin C}{\sin B+\sin C}.$$

Giải



Theo định lí Seva, thì AD, BM, CH đồng quy ⇔ $\frac{BD}{DC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AH}{BH}=1$

⇔ $\frac{BD}{DC}.\frac{AH}{BH}=1$. (1) (do MA = MC)

Vì AD là phân giác trong của góc A, nên

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$. (2)

Do CH ⊥ AB, nên

$\frac{AH}{DC}=\frac{HC\cot A}{HC\cot B}=\frac{\tan B}{\tan A}$. (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra AD, DM, CH đồng quy ⇔ $\frac{\sin C}{\sin B}.\frac{\tan B}{\tan A}=1$

⇔ sinCcosA = sinAcosB

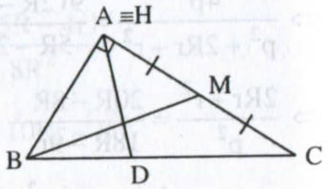
⇔ sinCcosA + sinBcosA = sinAcosB + sinBcosA

⇔ cosA(sinB + sinC) = sin(A + B) = sinC

⇔ $\cos A=\frac{\sin C}{\sin B+\sin C}$.

Nhận xét:

1. Chú ý rằng nếu $A=90^0$ hoặc $B=90^0$ thì AD, BM, CH không thể đồng quy. (thí dụ nếu $A=90^0$, ta có hình vẽ sau: Lúc đó H ≡ A và rõ ràng AD, BM, CH không đồng quy)



Vì thế khi AD, BM, CH đồng quy thì $A\neq 90^0$, $B\neq 90^0$ do đó tanB, tanA có nghĩa vì thế việc viết (3) là có lý).

2. Rõ ràng nếu ABC là tam giác đều thì ba đường phân giác trong AD, trung tuyến BM và đường cao CH đồng quy.

3. Theo trên nếu AD, BM, CH đồng quy ta có:

$\frac{\sin C}{\sin B}\frac{\tan B}{\tan A}=1\Rightarrow\frac{\sin C}{\cos B}=\tan A$

Vì thế $\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 C}{\cos^2 B}}}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 C+\cos^2 B}}$.

Vì thế từ bài trên ta có hệ quả sau:

Nếu trong ΔABC ba đường phân giác trong AD, trung tuyến BM và đường cao CH đồng quy thì ta có hệ thức: $\frac{\sin B+\sin C}{\sin C}=\frac{\cos B}{\sqrt{\sin^2 C+\cos^2 B}}$.

4. Ta sẽ chỉ ra thêm một lớp tam giác không phải là tam giác đều mà có tính chất hình học nêu trên.

... xét lớp các tam giác ABC có C = 2B và thỏa mãn hệ thức:

$\cos A=\frac{\sin C}{\sin B+\sin C}$. (*)

Dựa vào các hệ thức sinC = sin2B = 2sinBcosB

$\cos A=-\cos(B+C)=-\cos 3B=3\cos B-4\cos^3 B$.

Khi đó từ (*), ta có: $3\cos B-4\cos^3 B=\frac{2\sin B\cos B}{\sin B(1+2\cos B)}=\frac{2\cos B}{1+2\cos B}$

Do $C=2B\Rightarrow 0<B<90^0\Rightarrow\cos B\neq 0\Rightarrow 3-4\cos^2 B=\frac{2}{1+2\cos B}$

$\Rightarrow 8\cos^3 B+4\cos^2 B-6\cos B-1=0$. (**)

Đặt x = cosB (0 < x < 1) khi đó x là nghiệm của phương trình:

$f(x)=8x^3+4x^2-6x-1$. (***)

Do f(x) là hàm liên tục, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2>0$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\sqrt{2}<0$ nên (***) có ít nhất một nghiệm x_0 mà $\frac{\sqrt{2}}{2}<x_0<\frac{\sqrt{3}}{2}$ (như vậy rõ ràng $x_0\in(0;1)$).

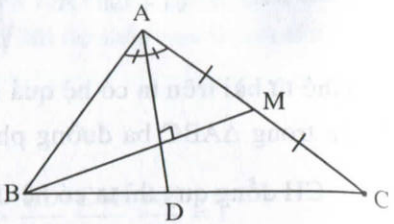
Như vậy gọi $B=\arccos x_0$, thì tam giác ABC với $B=\arccos x_0$; C = 2B, $A=180^0-3B$ sẽ thỏa mãn yêu cầu đầu bài. (chú ý do $\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 30^0<B<45^0$ ⇒ A > 0)

Đó là lớp tam giác không phải là tam giác đều mà vẫn thỏa mãn đầu bài.

Bài 2. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, đường phân giác trong của góc A và đường trung tuyến kẻ từ B vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$\cot\frac{A}{2}=3\tan\frac{B-C}{2}.$$

Giải



Vẽ phân giác trong AD và trung tuyến BM.

Ta có: $AD \perp BM \Leftrightarrow AB = AM$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}b \Leftrightarrow b = 2c.$$

Ta có: $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$

$$\Rightarrow AD \perp BM \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} = 3\tan\frac{B-C}{2}.$$

Bài 3. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi cotA = 2(cotB + cotC).

Giải

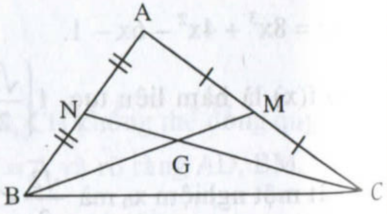
Đây chính là bài 3, loại 1, §2.

Bài 4. Cho tam giác ABC với hai trung tuyến BM, CN và G là trọng tâm của nó.

Chứng minh rằng ANGM là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi

$$\cos A = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{6\sin B \sin C}.$$

Giải



Ta có trong tam giác ABC:

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}. \quad (1)$$

Trong tam giác GBC, thì

$$\cot\widehat{BGC} = \frac{GB^2 + GC^2 - BC^2}{4S} = \frac{\frac{4}{9}(m_b^2 + m_c)^2 - a^2}{4.\frac{S}{3}}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{12S}. \quad (2)$$

Tứ giác ANGM nội tiếp $\Leftrightarrow A + \widehat{NGM} = 180^0$

$$\Leftrightarrow A + \widehat{BGC} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow \cot A = -\cot\widehat{BGC}$$

$$\Leftrightarrow 2\cot A = \cot A - \cot\widehat{BGC}.$$

Từ (1) (2) có: $\cot A - \cot\widehat{BGC} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{6S}$. (4)

Vì thế từ (3) (4) đi đến tứ giác ANGM nội tiếp

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12S} = \cot A \Leftrightarrow \frac{4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{12.2R^2 \sin A \sin B \sin C} = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{6\sin B \sin C} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Nhận xét:

1. Ta có thể nhận thấy:

Tứ giác ANGM nội tiếp $\Leftrightarrow \cot A = -\cot\widehat{BGC}$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{5a^2 - b^2 - c^2}{12S}$$

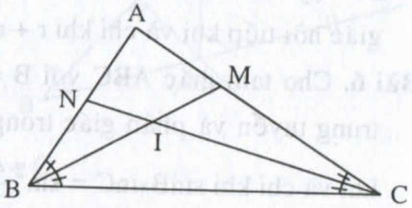
$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2.$$

Vì thế bài toán còn có nhiều dạng tương đương khác như:

+ Tứ giác ANGM nội tiếp $\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$.
+ Tứ giác ANGM nội tiếp $\Leftrightarrow \cot A = \dfrac{a^2}{4S}$.
+ Theo bài 20 suy ra $b^2 + c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \div\cot B, \cot A, \cot C$ vậy tứ giác ANGM nội tiếp $\Leftrightarrow \div \cot B, \cot A, \cot C$.

Bài 5. Cho tam giác ABC với hai đường phân giác BM, CN và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh tứ giác ANIM là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $\dfrac{a^3 - b^2 - c^3}{a - b - c} = a^2$.

Giải



Do BM, CN là phân giác nên

$$\widehat{BIC} = 180^0 - \frac{B+C}{2}. \quad (1)$$

Ta có:

$$\frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} = a^2 \Leftrightarrow a^3 - a^2(b + c) = a^3 - (b^3 + c^3)$$

$$\Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = 60^0$$

$\Leftrightarrow B + C = 120^0$

$\Leftrightarrow A + \widehat{NIM} = 180^0$

$\Leftrightarrow$ ANIM là tứ giác nội tiếp.

Nhận xét:

1. Ta biết rằng trong mọi tam giác ABC thì

$$r_a - r = p\tan\frac{A}{2} - (p-a)\tan\frac{A}{2}$$

$$= a\tan\frac{A}{2} = 2R\sin A\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = 2R.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = 4R\sin^2\frac{A}{2}.$$

Vì thế trong tam giác ABC, ta có:

$A = 60^0 \Leftrightarrow 4R\sin^2\frac{A}{2} = R$

$\Leftrightarrow r_a - r = R$

$\Leftrightarrow R + r = r_a$

Vì thế bài toán đã cho có dạng tương đương sau: ANIM là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $r_a = R + r$.

2. Cũng vì trong mọi tam giác ABC, ta có: $r + r_a + r_b - r_c = 4R\cos A$.

Vì thế trong ΔABC, ta có:

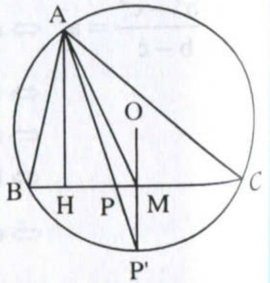
$A = 60^0 \Leftrightarrow r + r_a + r_b - r_c = 2R$

$\Leftrightarrow r + r_a + r_b = 2R + r_c$

Do vậy bài toán đã cho lại có dạng tương đương khác sau đây: ANIM là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $r + r_a + r_b = r_c + 2R$.

Bài 6. Cho tam giác ABC với B ≠ C. Gọi AH, AM, AP lần lượt là chiều cao, trung tuyến và phân giác trong xuất phát từ A. Chứng minh rằng PH = PM khi và chỉ khi $\sin B\sin C = \sin^2\frac{A}{2}$.

Giải



Do B ≠ C có thể giả sử B > C. Giả sử AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại P', như vậy $\overset{\frown}{BP'} = \overset{\frown}{P'C}$ và ta có P'M ⊥ BC

$\Rightarrow$ AH // PM (và P ở trong đoạn HM).

Áp dụng định lí hàm số sin trong hai tam giác ABP, ACP, ta có:

$$\frac{BP}{AP} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin B};\ \frac{CP}{AP} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin B\sin C} = \frac{BP.CP}{AP^2}.\quad (1)$$

Từ (1) suy ra: $\sin^2\frac{A}{2} = \sin B\sin C \Leftrightarrow BP.CP = AP^2$. (2)

Theo hệ thức lượng trong đường tròn, thì BP.CP = AP.PP', vì thế:

$\sin^2\frac{A}{2} = \sin B\sin C \Leftrightarrow AP.PP' = AP^2$

$\Leftrightarrow PP' = AP$

$\Leftrightarrow PH = PM.$

Đó là đpcm.

Bài 7. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $a = b(1 + 2\cos 2B)$.

Chứng minh rằng trên đường thẳng BC luôn tồn tại điểm M sao cho ABM và ACM đồng thời là các tam giác cân. Mệnh đề đảo có đúng không?

Giải

Giả sử $a = b(1 + 2\cos 2B)$

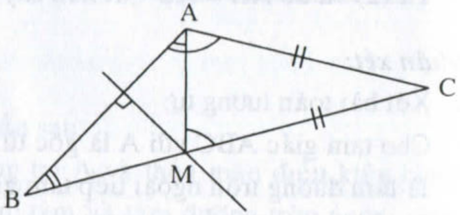
$\Rightarrow \sin A = \sin B(1 + 2\cos 2B)$

$\Rightarrow \sin A = \sin B + \sin 3B - \sin B$

$\Rightarrow \sin A = \sin 3B.$ (1)

Từ (1) suy ra hai khả năng sau:

1. Nếu A = 3B. Vẽ trung trực của AB cắt BC tại M $\Rightarrow$ MAB là tam giác cân đỉnh M.



Do $A = 3B \Rightarrow \widehat{MAC} = A - \widehat{MAB}$

$= 3B - B = 2B$

Lại có $\widehat{AMC} = \widehat{MAB} + \widehat{MBA}$

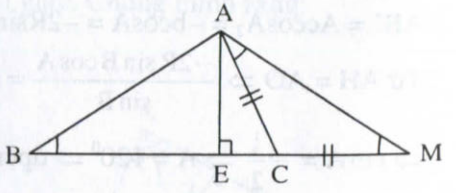
$= B + B = 2B.$

Vậy ACM là tam giác cân đỉnh C.

2. Nếu $A + 3B = 180^0 \Rightarrow A + 3B = A + B + C$

$\Rightarrow C = 2B.$

Kẻ AE ⊥ BC. Kéo dài BE một đoạn EM = BE $\Rightarrow$ MAB là tam giác cân đỉnh A.



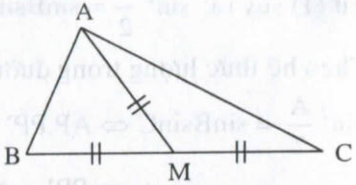
Ta có: $C = \widehat{CAM} + \widehat{AMB}$

$\Rightarrow 2B = \widehat{CAM} + B$

$\Rightarrow \widehat{CAM} = B$.

Vậy ACM cũng là tam giác cân đỉnh C $\Rightarrow$ đpcm.

Mệnh đề đảo nói chung không đúng. Thật vậy xét tam giác vuông ABC tại A có $C = 70^0$; $B = 20^0$. Lấy M là trung điểm của BC $\Rightarrow$ MB = MC = MA $\Rightarrow$ hai tam giác MAB và MAC là hai tam giác cân.



Khi đó ta có: $\sin A = \sin 90^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

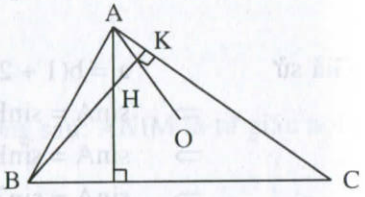
$$\sin 3B = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\Rightarrow \sin A \neq \sin 3B \Rightarrow a \neq b(1 + 2\cos 2B)$.

Nhận xét được chứng minh

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn và thỏa mãn điều kiện AO = AH, ở đây O và H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác. Chứng minh $A = 60^0$.

Giải



Vì ABC là tam giác nhọn nên H nằm bên trong đường cao BK.

Trong tam giác vuông AHK, ta có:

$$AH = \frac{AK}{\cos\widehat{HAK}} = \frac{AB.\cos A}{\sin C} \quad (1)$$

(do $\widehat{HAK} + C = 90^0$).

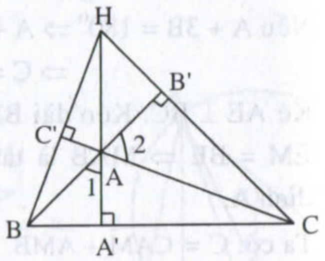
Ta có: AB = 2RsinC, nên từ (1) suy ra AH = 2RcosA. (2)

Từ (2) và do AH = AO = R nên suy ra $\cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0 \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét:

1. Xét bài toán tương tự:

Cho tam giác ABC với A là góc tù. Biết rằng OA = HA (ở đây O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác). Chứng minh $A = 120^0$.



Trong tam giác vuông AHB', ta có:

$$AH = \frac{AB'}{\cos\widehat{HAB}} = \frac{AB'}{\cos A_1} = \frac{AB'}{\sin B}.$$

Trong tam giác vuông AB'C', thì

$AB' = AC\cos A_2 = -b\cos A = -2R\sin B\cos A$.

Từ $AH = AO \Rightarrow \dfrac{-2R\sin B\cos A}{\sin B} = R$

$\Rightarrow \cos A = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 120^0 \Rightarrow$ đpcm.

Chú ý rằng với bài toán trên còn có cách giải khác sau đây:

Ta biết rằng A chính là trực tâm của tam giác nhọn (có ba góc nhọn) HBC.

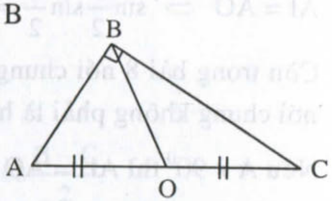
Mặt khác như đã biết bốn tam giác HAB, HAC, HBC, ABC có đường tròn ngoại tiếp bằng nhau, nên R cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔHBC. Từ đó:

$R = OA = O_1H$, ở đây O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHBC.

Từ $AH = OA \Rightarrow AH = HO_1$

Theo phần 1/ suy ra $\widehat{BHC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = A = 120^0 \Rightarrow$ đpcm.

2. Nếu ABC là tam giác vuông (nhưng $A < 90^0$), thì từ AH = AO ta suy ra $A = 60^0$, với O, H kí hiệu như trên



Giả sử ABC là tam giác vuông tại B. Khi đó $H \equiv B$

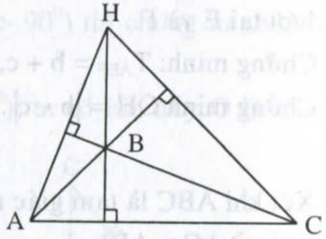
O khi đó là trung điểm của BC

Từ $AH = AO \Rightarrow AB = AO$

$\Rightarrow$ ABO là tam giác đều

$\Rightarrow A = 60^0$.

3. Cho ABC là tam giác có góc tù nhưng A nhọn. Giả sử AH = AO (H, O vẫn kí hiệu như trên). Khi đó $A = 60^0$.



Giả sử $B > 90^0$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì nó cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔHAC. Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔHAC, ta có:

$AH = 2R\sin\widehat{HCA} = 2R\cos A$

Từ AH = AO = R

$\Rightarrow 2R\cos A = R \Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0$.

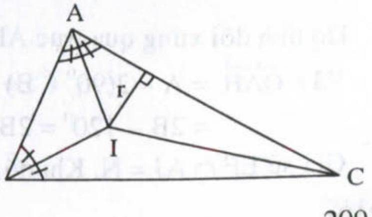
4. Từ bài toán và chú ý 1/2/3/ suy ra kết luận sau:

Nếu ABC không phải là tam giác vuông tại A và thỏa mãn điều kiện hình học: AH = AO (với H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC). Khi đó ta có: $|\cos A| = \dfrac{1}{2}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện AI = AO, ở đây I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Giải



Ta có: $IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}} = \dfrac{4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$

$$= 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Từ AO = R suy ra IA = AO $\Leftrightarrow 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = R$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Nhận xét:

1. Trong bài 9, thực chất ta có trong mọi tam giác ABC thì

$$AI = AO \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{4}$$

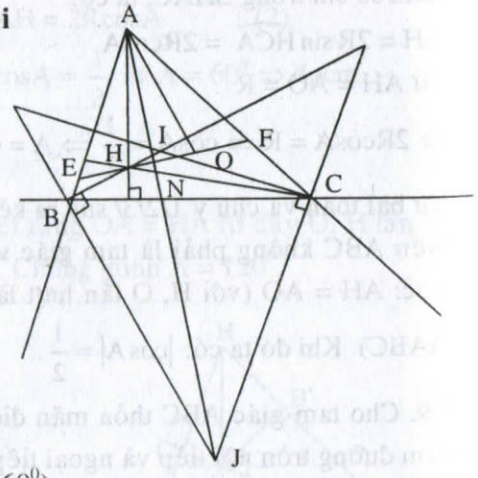
2. Còn trong bài 8 nói chung trong mọi tam giác ABC thì AH = AO và $A = 60^0$ nói chung không phải là hai điều kiện tương đương. Tuy nhiên ta có bài toán:

Nếu $A \neq 90^0$ thì $AH = AO \Leftrightarrow |\cos A| = \frac{1}{2}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC, có $A = 60^0$. Gọi O và H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ấy. Đường thẳng OH cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh: $T_{AEF} = b + c$, ở đây T_{AEF} là chu vi ΔAEF.
2. Chứng minh $OH = |b - c|$.

Giải



1. Xét khi ABC là tam giác nhọn (giả sử AC > AB)

Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc A của ΔABC.

Dễ thấy H và O đối xứng với nhau qua trục AIJ (xem hình học lớp 9)

Giả sử $OH \cap AB = E$; $OH \cap AB = F$.

Vì $OH \perp AJ \Rightarrow$ AHO là tam giác cân đỉnh A nên AH = AO = R

Tương tự AEF là tam giác đều (vì $A = 60^0$)

Ta có: $\widehat{OAH} = A - \left(\widehat{EAH} + \widehat{OAF}\right)$.

Do tính đối xứng qua trục AIJ nên có: $\widehat{EAH} = \widehat{OAF} = 90^0 - B$

Vậy $\widehat{OAH} = A - 2(90^0 - B) = 60^0 - 180^0 + 2B$

$$= 2B - 120^0 = 2B - (B + C) = B - C.$$

Giả sử $EF \cap AJ = N$. Khi đó trong Δ vuông AHN ta có:

$$AN = AH\cos\widehat{HAN} = AH\cos\frac{\widehat{OAH}}{2} = R\cos\frac{B-C}{2}.$$

Từ đó $AE = AF = EF = \frac{2AN\sqrt{3}}{3}$ (theo công thức đường cao trong tam giác đều AEF: $AN = \frac{AE\sqrt{3}}{2}$).

Từ đó: $T_{AEF} = 3AE = 3.\frac{2}{3}\sqrt{3}.R\cos\frac{B-C}{2}$,

hay $T_{AEF} = R.\,2\sqrt{3}\cos\frac{B-C}{2}$. (1)

Vì $A = 60^0 \Rightarrow B + C = 120^0 \Rightarrow \sin\frac{B+C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

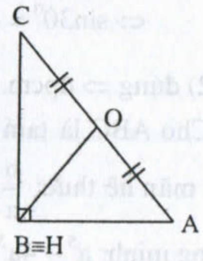
Từ đó kết hợp với (1) suy ra: $T_{AEF} = 4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$$= 2R(\sin B + \sin C)$$

$$= b + c \Rightarrow \text{đpcm}.$$

+ Khi ABC là tam giác có 1 góc tù (chẳng hạn $B > 90^0$) thì chứng minh hoàn toàn tương tự.

+ Khi ABC là tam giác vuông (chẳng hạn $B = 90^0$), ta có lúc này O là trung điểm của AC, còn $H \equiv B$



$OH \cap AC = O$,

$OH \cap AB = B$,

nghĩa là $E \equiv B$; $F \equiv O$.

Vậy $T_{AEF} = T_{ABO} = AB + AO + BO$

$$= c + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b + c \Rightarrow \text{đpcm}.$$

2. Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó ta có: O, H, G thẳng hàng và $OG = \frac{1}{3}OH$ (đường thẳng Euler). Ta lại có: $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$

$\Rightarrow OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$. (2)

Do $A = 60^0$ nên $a = 2R\sin A = \sqrt{3}\,R \Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{3}$ (3)

Từ (2) (3) có: $OH^2 = 2a^2 - (b^2 + c^2)$

$$= 2(b^2 + c^2 - 2bc\cos A) - (b^2 + c^2)$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc = (b - c)^2$$

$\Rightarrow OH = |\,b - c\,| \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Bài trên cho ta thêm một tính chất của một tam giác có một góc $= 60^0$

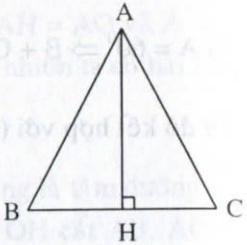
Ta cũng biết rằng có rất nhiều hệ thức lượng giác hoặc hình học tương đương với sự kiện tam giác có một góc 60^0, vì thế nếu kết hợp chúng lại sẽ dẫn đến nhiều bài tập lí thú khác. Các bạn hãy thử xem điều đó có đúng không?

§ 3. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC CÂN

Bài 1. Cho tam giác cân ABC đỉnh A với $A = 20^0$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$. (1)

Giải



Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{HAC} = 10^0$.

Từ đó $BH = AB.\sin\widehat{BAH} \Rightarrow \frac{a}{2} = b\sin 10^0$

$\Rightarrow a = 2b\sin 10^0$. (1)

Từ (1) suy ra: $a^3 + b^3 = 3ab^2$

$\Leftrightarrow 8b^3\sin^3 10^0 + b^3 = 6b^3\sin 10^0$

$\Leftrightarrow 8\sin^3 10 + 1 = 6\sin 10$

$\Leftrightarrow 3\sin 10^0 - 4\sin^3 10 = \frac{1}{2}$

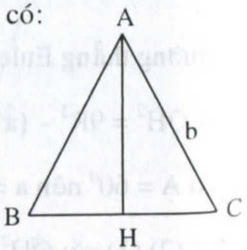
$\Leftrightarrow \sin 30^0 = \frac{1}{2}$. (2)

Vì (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 2. Cho ABC là tam giác cân đỉnh A, cạnh bên bằng b, cạnh đáy bằng a và thỏa mãn hệ thức: $\frac{b}{a} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$.

Chứng minh: $a^5 - 4a^3b^2 + 3ab^4 - b^5 = 0$.

Giải



Đặt $A = 2x \Rightarrow B = C = \frac{\pi}{2} - x$. Theo định lí hàm số sin, ta có:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin 2x} = \frac{1}{2\sin x}.$$

Vì thế $\frac{b}{a} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin x} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin x} = 1 + \frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin x} = \frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin x} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}} \left(\text{do } \sin\frac{3\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{14} \text{ vì } \frac{3\pi}{7} + \frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{14}$.

Vậy $A = 2x = \frac{\pi}{7}; B = C = \frac{3\pi}{7}$.

Theo định lí hàm số sin ta có: $\frac{a}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sin\frac{3\pi}{7}} \Rightarrow \frac{a}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{b}{3\sin\frac{\pi}{7} - 4\sin^3\frac{\pi}{7}}$

$\Rightarrow b = a\left(3 - 4\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$ (1)

Do $\sin^2\frac{\pi}{7} = 4\sin^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{\pi}{14} = 4\left(\frac{a}{2b}\right)^2\left(1 - \frac{a^2}{4b^2}\right)$ (2)

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn suy ra đpcm.

Bài 3. Cho tam giác cân ABC đỉnh A với $A = 10^0$.

Chứng minh: $\left(\frac{4S}{b^2}\right)^2 + \frac{b^2}{4S} = 3$.

Giải

Ta có: $S = \frac{1}{2}b^2\sin 10^0 \Rightarrow 4S = 2b^2\sin 10^0$.

Vì vậy $\left(\frac{4S}{b^2}\right)^2 + \frac{b^2}{4S} = 3 \Leftrightarrow 4\sin^2 10^0 + \frac{1}{2\sin 10^0} = 3$

$\Leftrightarrow 8\sin^3 10 + 1 = 6\sin 10^0$

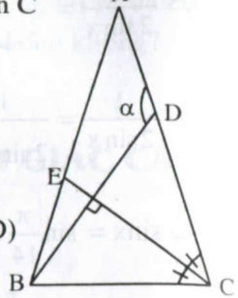
$\Leftrightarrow 3\sin 10^0 - 4\sin^3 10^0 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin 30^0 = \frac{1}{2}$ (1)

Vì (1) đúng suy ra đpcm.

Bài 4. Cho tam giác cân ABC đỉnh A. Biết rằng trung tuyến BD và phân giác CE vuông góc với nhau. Chứng minh rằng: $\sin\widehat{BDA} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Giải



Đặt $\widehat{BDA} = \alpha$. Do $CE \perp BD$ nên CBD là tam giác cân đỉnh C

$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CDB} = \pi - \alpha$

$\Rightarrow B = C = \pi - (2\pi - 2x) = 2\alpha - \pi$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = (2\alpha - \pi) - (\pi - \alpha) = 3\alpha - 2\pi$.

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác ABD có:

$$\frac{AB}{\sin\widehat{ADB}} = \frac{AD}{\sin\widehat{ABD}} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin(3\alpha - 2\pi)} \text{ (do AB = 2AD)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin 3\alpha}$$

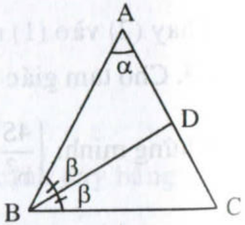
$$\Rightarrow \sin\alpha = 2(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$$

$$\Rightarrow 1 = 2(3 - 4\sin^2\alpha) \quad \text{(vì } \sin\alpha > 0)$$

$$\Rightarrow \sin^2_\alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 5. Cho tam giác cân đỉnh A. Đường phân giác trong của góc B cắt AC ở D. Giả sử BC = AD + BD. Chứng minh $A = \frac{5\pi}{9}$.

Giải



Đặt $A = \alpha \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{B}{2} = \frac{\pi - \alpha}{4} = \beta$.

Đặt AB = AC = b.

Theo định lí hàm số sin trong ΔABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 2\beta} \Rightarrow BC = \frac{b\sin\alpha}{\sin 2\beta}. \qquad (1)$$

Lại áp dụng định lí hàm số sin trong ΔABD và có:

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\widehat{BDA}} = \frac{AB}{\sin 3\beta} \text{ (do } \widehat{BDA} = \widehat{DBC} + \widehat{BCD} = \beta + 2\beta = 3\beta)$$

$$\Rightarrow BD = \frac{b\sin\alpha}{\sin 3\beta}. \qquad (2)$$

Tương tự sẽ có: $AD = \frac{b\sin\beta}{\sin 3\beta}$. (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra: $BC = AD + BD \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin 3\beta}$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\sin 3\beta = \sin 2\beta(\sin\alpha + \sin\beta) \qquad (4)$$

Do $\beta = \frac{\pi - \alpha}{4} \Rightarrow \alpha = \pi - 4\beta$

Vì thế $(4) \Leftrightarrow \sin 4\beta\sin 3\beta = \sin 2\beta(\sin 4\beta + \sin\beta)$

$$\Leftrightarrow \cos\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta + \cos\beta - \cos 3\beta$$

$$\Leftrightarrow \cos 3\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\beta\sin 5\beta = \sin 2\beta\sin 4\beta. \qquad (5)$$

Do $\sin 2\beta > 0$ nên từ (5) có: $\sin 5\beta = \sin 4\beta$. (6)

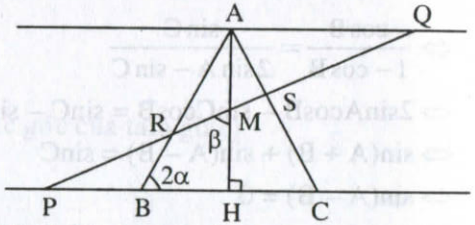
Vì $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$ (do $B = C < \pi$), nên từ (6) đi đến:

$$5\beta + 4\beta = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{9} \Rightarrow A = \alpha = \pi - 4\beta = \frac{5\pi}{9} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 6. Cho tam giác cân ABC đỉnh A, có B = C = 2α, đường cao AH, d là đường thẳng song song với BC vẽ qua A. Đoạn thẳng PQ = l đi qua trung điểm M của AH, với P thuộc đường thẳng BC, Q thuộc d. Giả sử PQ tạo với AH góc nhọn β. Giả sử PQ cắt AB, AC lần lượt tại R và S. Chứng minh:

$$RS = \frac{-1\sin 2\beta\sin 4\alpha}{4\cos(2\alpha + \beta)\cos(2\alpha - \beta)}.$$

Giải



Từ $MA = MH \Rightarrow MP = MQ = \frac{1}{2}$.

Ta có: $\widehat{ARM} = \beta - \widehat{RAM}$

$$= \beta - (90^0 - 2\alpha)$$

$$= \beta + 2\alpha - 90^0. \qquad (1)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong Δ ARM và có:

$$\frac{MA}{\sin(\beta + 2\alpha - 90^0)} = \frac{MR}{\sin(90^0 - 2\alpha)} \Rightarrow MR = \frac{MA\cos 2\alpha}{-\cos(2\alpha + \beta)}.$$

Do $MA = MQ\cos\beta = \frac{l}{2}\cos\beta$

$$\Rightarrow MR = -\frac{l\cos 2\alpha\cos\beta}{2\cos(2\alpha + \beta)}. \qquad (1)$$

Lại áp dụng định lí hàm số sin trong ΔAMS tương tự ta có:

$$MS = \frac{l\cos 2\alpha\cos\beta}{2\cos(\beta - 2\alpha)} \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra:

$$RS = MR + MS = \frac{1\cos 2\alpha\cos 2\beta}{2}\left(\frac{-1}{\cos(2\alpha + \beta} + \frac{1}{\cos(\beta - 2\alpha)}\right).$$

Sau khi rút gọn, ta có: $RS = \frac{-1\sin 2\beta\sin 4\alpha}{4\cos(2\alpha + \beta)\cos(\beta - 2\alpha)} \Rightarrow$ đpcm.

§ 4. SỬ DỤNG ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC ĐỂ NHẬN DẠNG TAM GIÁC CÂN

Bài 1. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau thì đó là tam giác cân.

1. $\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$. 2. $a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = c^2\cot\frac{C}{2}$.

3. $\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$. 4. $\tan A + 2\tan B = \tan A\tan^2 B$.

Giải

1. $\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{(1+\cos B)(1-\cos B)}=\frac{(2a+c)^2}{(2a+c)(2a-c)} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B}=\frac{2a+c}{2a-c}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{2\cos B}{1-\cos B}=1+\frac{2c}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{\cos B}{1-\cos B}=\frac{c}{2a-c}$

$\Leftrightarrow \frac{\cos B}{1-\cos B}=\frac{\sin C}{2\sin A-\sin C}$

$\Leftrightarrow 2\sin A\cos B - \sin C\cos B = \sin C - \sin C\cos B$

$\Leftrightarrow \sin(A+B)+\sin(A-B)=\sin C$

$\Leftrightarrow \sin(A-B)=0$ (1)

Từ (1) và do A, B là các góc của tam giác suy ra A = B

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C ⇒ đpcm.

2. Ta có: $a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = c^2\cot\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = \sin C.\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2A}{2}\sin 2B+\frac{1-\cos 2B}{2}\sin 2A=\sin C(1+\cos C)$

$\Leftrightarrow \sin(A+B)\cos(A-B)-\sin(A+B)\cos(A+B)=\sin C(1+\cos C)$. (1)

Do $\sin(A+B)=\sin C>0$, nên từ (1) có:

$\cos(A-B)-\cos(A+B)=1+\cos C$

$\Rightarrow \cos(A-B)+\cos C=1+\cos C \Rightarrow \cos(A-B)=1$

$\Rightarrow A-B=0 \Rightarrow A=B$.

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C ⇒ đpcm.

3. Ta có: $\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A+\sin^2 B}-\frac{\cos^2 A}{2\sin^2 A}=\frac{\cos^2 B}{2\sin^2 B}-\frac{\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}$

$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A(\sin^2 A-\sin^2 B)}{2\sin^2 A(\sin^2 A+\sin^2 B)}=\frac{\cos^2 B(\sin^2 A-\sin^2 B)}{2\sin^2 B(\sin^2 A+\sin^2 B)}$

$\Leftrightarrow (\sin^2 A-\sin^2 B)(\cot^2 A-\cot^2 B)=0$ (1)

Vì trong mọi ΔABC ta có $\sin A+\sin B>0$; $\cot A+\cot B\neq 0$ nên từ (1) suy ra:

$(\sin A-\sin B)(\cot A-\cot B)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin A=\sin B\\ \cot A=\cot B\end{array}\right. \Leftrightarrow A=B$.

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C ⇒ đpcm.

4. $\tan A + 2\tan B = \tan A\tan^2 B$

$\Leftrightarrow \tan A(1-\tan^2 B)=-2\tan B$. (1)

Do $1-\tan^2 B\neq 0$ (và nếu $1-\tan^2 B=0 \Rightarrow$ VT (1) = 0, còn VP (1) ≠ 0)

Nên (1) $\Leftrightarrow \tan A=-\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}$

$\Leftrightarrow \tan A=-\tan 2B$

$\Leftrightarrow A+2B=180^0$ (do A, B là các góc của tam giác)

$\Leftrightarrow A+2B=A+B+C$

$\Leftrightarrow B=C$.

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A ⇒ đpcm.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây thì đó là tam giác cân.

1. $(a-b+c)\cot\frac{C}{2}=(a+b+c)\tan\frac{B}{2}$. 2. $a\left(\cot\frac{C}{2}-\tan A\right)=b\left(\tan B-\cot\frac{C}{2}\right)$.

3. $a+b=\tan\frac{C}{2}(a\tan A+b\tan B)$. 4. $\tan A+\tan B=2\cot\frac{C}{2}$.

5. $\frac{1}{2}(\tan A+\tan B)=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$. 6. $\sin A\sin B=\cos^2\frac{C}{2}$.

Giải

1. Ta có: $(a-b+c)\cot\frac{C}{2}=(a+b+c)\tan\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow (\sin A+\sin C-\sin B)\cot\frac{C}{2}=(\sin A+\sin B+\sin C)\tan\frac{B}{2}$ (1)

Áp dụng công thức quen biết sau: Trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin A + \sin C - \sin B = 4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Vì thế

$$(1) \Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} \qquad \left(\text{do } \cos\frac{C}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow A = B.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C ⇒ đpcm.

2. Ta có:

$$a\left(\cot\frac{C}{2} - \tan A\right) = b\left(\tan B - \cot\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(\tan\frac{A+B}{2} - \tan A\right) = b\left(\tan B - \tan\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin A\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2} - A\right)}{\cos\frac{A+B}{2}\cos A} = \sin B\frac{\sin\left(B - \frac{A+B}{2}\right)}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin A\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos A} = \sin B\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B} \Leftrightarrow \sin\frac{B-A}{2}(\tan A - \tan B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{B-A}{2} = 0\\ \tan A = \tan B\end{array}\right. \Leftrightarrow A = B.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C ⇒ đpcm.

3. Chứng minh như 2/.

4. Ta có:

$$\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = 2\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B} = 2\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\cos A\cos B \qquad \left(\text{do } \cos\frac{C}{2} \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos C = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos C = -\cos C + \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A = B$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C ⇒ đpcm.

5. Chứng minh tương tự 4/ ⇒ ABC là tam giác cân đỉnh C.

6. Chứng minh như phần sau của 4/ ⇒ ABC là tam giác cân đỉnh C.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau thì là tam giác cân

1. $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$.
2. $\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.
3. $\tan\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}$.
4. $l_a^2 = \frac{4bc-a^2}{4}$.
5. $a^2 + b^2 = \tan\frac{C}{2}(a^2\tan A + b^2\tan B)$.

Giải

1. Ta có: $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(1 + \tan^2\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{B}{2}\left(1 + \tan^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right) + \left(\tan^3\frac{A}{2} - \tan^3\frac{B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)\left(1 + \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

Do $\tan\frac{A}{2} > 0,\ \tan\frac{B}{2} > 0$, nên (1) ⇔ $\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2} = 0 \Leftrightarrow A = B$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C.

2. Ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}.$$

Vậy $\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2}{4bc}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow b-c=0 \Leftrightarrow b=c.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A ⇒ đpcm.

3. Ta có: $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}}$.

Từ đó suy ra: $\tan\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} = \frac{a^2}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{a^2}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

$$\Leftrightarrow a^2-(b-c)^2 = a^2 \Leftrightarrow b-c=0 \Leftrightarrow b=c.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A.

4. Ta có: $l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Rightarrow l_a^2 = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow l_a^2 = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\left(\frac{1+\cos A}{2}\right) = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\left(\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}\right)$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2-a^2]$$

Vì thế: $l_a^2 = \frac{4bc-a^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2-a^2] = \frac{4bc-a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4bc(b+c)^2 - 4bca^2 = 4bc(b+c)^2 - a^2(b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow 4bc = (b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = c$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A ⇒ đpcm.

5. Ta có: $a^2+b^2 = \tan\frac{C}{2}(a^2\tan A + b^2\tan B)$

$$\Leftrightarrow a^2\left(1-\tan\frac{C}{2}\tan A\right) + b^2\left(1-\tan\frac{C}{2}\tan B\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{\cos\frac{C}{2}\cos A}\cos\left(\frac{C}{2}+A\right) + \frac{b^2}{\cos\frac{C}{2}\cos B}\cos\left(\frac{C}{2}+B\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{\cos A}\cos\left(\frac{C}{2}+A\right) + \frac{b^2}{\cos B}\cos\left(\frac{C}{2}+B\right) = 0. \qquad (1)$$

Do $\left(\frac{C}{2}+A\right)+\left(\frac{C}{2}+B\right) = C+A+B = \pi$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{C}{2}+A\right) = -\cos\left(\frac{C}{2}+B\right).$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \cos\left(\frac{C}{2}+A\right)\left[a^2\cos B - b^2\cos A\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{C}{2}+A\right)\left[(1-\cos^2 A)\cos B - (1-\cos^2 B)\cos A\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{C}{2}+A\right)\left[(\cos B-\cos A) - (1+\cos A\cos B\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{C}{2}+A\right)(\cos B-\cos A) = 0 \quad (\text{do } 1+\cos A\cos B > 0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{C}{2}+A\right)=0\\ \cos B=\cos A\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{C}{2}+A=\frac{\pi}{2}\\ B=A\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{C}{2}+A=\frac{A+B+C}{2}\\ B=A\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow B = A.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C ⇒ đpcm.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong các hệ thức sau thì đó là tam giác cân

1. $\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right) = \frac{r}{2R}$.
2. $r + r_a = 4R\cos C$.
3. $l_a = \frac{bc}{2R}$.

Giải

1. Ta có: $\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right) = \frac{r}{2R}$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2R}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin\frac{A}{2}=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad \text{(do } \sin\frac{A}{2}>0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow B=C$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A.

2. Ta có: $r_a + r = 4R\cos C$

$$\Leftrightarrow p\tan\frac{A}{2}+(p-a)\tan\frac{A}{2}=4R\cos C \Leftrightarrow (2p-a)\tan\frac{A}{2}=4R\cos C$$

$$\Leftrightarrow (b+c)\tan\frac{A}{2}=4R\cos C \Leftrightarrow 2R(\sin B+\sin C)\tan\frac{A}{2}=4R\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2R.2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=4R\cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos B+\cos C=2\cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos C=\cos B$$

$$\Leftrightarrow C=B.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A.

3. Ta có: $l_a=\frac{bc}{2R}$

$$\Leftrightarrow \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{bc}{2R} \Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{A}{2}}{2R(\sin B+\sin C)}=\frac{1}{2R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=1 \Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2}=1 \Leftrightarrow B=C.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A.

Bài 5. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $\sqrt{3}\cos A+3(\cos B+\cos C)=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Chứng minh rằng ABC là tam giác cân đỉnh A, với góc ở đỉnh $A=120^0$.

Giải

Từ giả thiết ta có: $\cos A+\sqrt{3}(\cos B+\cos C)=\frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow 1-\cos A-\sqrt{3}(\cos B+\cos C)+\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}-2\sqrt{3}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\frac{3}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)+\frac{3}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{B-C}{2}=0 & (1)\\ \sin\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B-C}{2}=0. & (2)\end{cases}$$

Từ (1) có B = C. Thay (2) có $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=120^0$.

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A, với $A=120^0$.

Bài 6. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)=2$.

Chứng minh ABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

Giải

Đưa hệ thức đã cho về dạng tương đương sau:

$$2-\cos A-\sqrt{2}(\cos B+\cos C)=0$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin^2\frac{A}{2}-2\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}-2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sin^2\frac{B-C}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{B-C}{2}=0 & (1)\\ \sin\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B-C}{2}=0 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) có B = C. Thay vào (2) có $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A=90^0$.

Vậy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A ⇒ đpcm.

Nhận xét:

1. Từ bài 5, 6 ta suy ra kết quả tổng quát sau (với cách giải hoàn toàn tương tự và xin dành cho bạn đọc)

   Cho $0 < x < 2$ và giả sử ABC là tam giác thỏa mãn hệ thức:

   $$\cos A + x(\cos B + \cos C) = \frac{x^2}{2} + 1$$

   Khi đó ABC là tam giác cân đỉnh A, với góc ở đỉnh $A = 2\arcsin\frac{x}{2}$

+ Nếu $x = \sqrt{2}$, ta thu lại kết quả bài 6
+ Nếu $x = \sqrt{3}$, ta thu lại kết quả bài 5.

2. Từ kết quả tổng quát này, dĩ nhiên ta thu được nhiều bài toán riêng khác nữa

   Xét thí dụ sau:

a. Cho ABC là tam giác thỏa mãn hệ thức:

   $8\cos A + 4(\sqrt{5} - 1)(\cos B + \cos C) = 11 - \sqrt{5}$.

   Chứng minh ABC là tam giác cân đỉnh A với góc ở đỉnh bằng 36^0.

   Thật vậy đưa hệ thức đã cho về dạng tương đương sau:

   $$\cos A + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\cos B + \cos C) = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2} + 1.$$

   Áp dụng kết quả trên với $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ suy ra ABC là tam giác cân đỉnh A, với góc ở đỉnh $A = 2\mathrm{crc}\sin\frac{x}{2} = 2\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   Biết rằng $\sin 180^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, từ đó suy ra $A = 36^0$.

b. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

   $2\cos A + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\cos B + \cos C) = 4 - \sqrt{3}$.

   Chứng minh ABC là tam giác cân đỉnh A, với $A = 30^0$.

   Đưa hệ thức thứ ba về dạng:

   $$\cos A + \sqrt{2 - \sqrt{3}}(\cos B + \cos C) = \frac{(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}{2} + 1$$

   Từ đó áp dụng kết quả trên với $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ và chú ý rằng $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

   $\Rightarrow$ ABC là tam giác cân đỉnh A với $A = 30^0$.

Bài 7. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$\cos 2A + x(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{x^2}{2} + 1 = 0,\ \text{với } |x| < 2,\ x \neq 0.$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác cân đỉnh A, với $A = \arccos\frac{x}{2}$.

Giải

Từ hệ thức đã cho ta có:

$$2\cos^2 A + 2x\cos(B + C)\cos(B - C) + \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A - x\cos A\cos(B - C) + \frac{x^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos A - \frac{x\cos(B - C)}{2}\right]^2 + \frac{x^2\sin^2(B - C)}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sin(B - C) = 0 & (1) \\ \cos A - \dfrac{x\cos(B - C)}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Do $x \neq 0$; nên từ (1) suy ra B = C. Thay vào (2) có: $\cos A = \frac{x}{2}$.

Do $|x| < 2 \Rightarrow A = \arccos\frac{x}{2}$.

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A, với $A = \arccos\frac{x}{2}$.

Nhận xét:

1. Lấy $x = \sqrt{3}$.

   Khi đó ABC là tam giác cân đỉnh A với góc ở đỉnh $A = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^0$.

2. Lấy $x = -1$.

   Khi đó ABC là tam giác cân đỉnh A với góc ở đỉnh $A = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^0$.

3. Lấy $x = \sqrt{2}$.

   Khi đó ABC là tam giác cân đỉnh A với góc ở đỉnh $A = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^0$.

Bài 8. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}.$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác cân đỉnh A, với $A = 120^0$.

Giải

Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C}$. (1)

Từ (1) suy ra hệ thức đã cho có dạng tương đương sau:

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{4} - \cos^2 B - \cos^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}\sin A + \sqrt{3}\cos B + \sqrt{3}\cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = 60^0 \\ A = 120^0 \end{array}\right. \\ B = 30^0 \\ C = 30^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C = 30^0 \\ A = 120^0 \end{cases}$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A, với $A = 120^0$.

Nhận xét: Với phép giải hoàn toàn tương tự, ta có kết quả sau:

Nếu như tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$2\cos A\sin B\sin C - \sin B - \sin C + \cos A + \frac{7}{4} = 0 \qquad (*)$$

thì ABC là tam giác cân đỉnh A, với $A = 120^0$.

Lưu ý rằng $(*) \Leftrightarrow \left(\sin B - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin C - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos A + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$

Từ đó suy ra kết quả trên.

Bài 9. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} \sin B = (\sqrt{2} - \cos C)\sin A \\ \sin C = (\sqrt{2} - \cos B)\sin A. \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác vuông cân.

Giải

Từ hệ điều kiện suy ra:

$$\sin B - \sin C = \sin A(\cos B - \cos C)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2} = -2\sin A\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin A\cos\frac{A}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B-C}{2} = 0 \text{ (do } \sin\frac{A}{2} > 0, \cos\frac{A}{2} > 0 \text{ và } \sin A > 0)$$

$\Leftrightarrow B = C.$

Thay lại $B = C$ vào các điều kiện đã cho lại có:

$\sin B = (\sqrt{2} - \cos B)\sin A$

$\Leftrightarrow \sin B = (\sqrt{2} - \cos B)\sin(B + C)$

$\Leftrightarrow \sin B = (\sqrt{2} - \cos B)\sin 2B$

$\Leftrightarrow \sin B = 2\sin B\cos B((\sqrt{2} - \cos B)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 B - 2\sqrt{2}\cos B + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos B - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos B = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow B = 45^0.$

Vậy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\sin B \\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B. \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác vuông cân.

Giải

Xét hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\sin B & (1) \\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có:

$\sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = 4\sin A\sin B\cos A\sin B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = 2\sin 2A\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin A\sin B(\sin A\cos B - \sin B\cos A) = 0 \Leftrightarrow \sin(A - B) = 0$

$\Leftrightarrow A = B.$ (3)

Thay (3) vào (2) và có:

$2\sin 2A = 4\sin^2 A$

$\Leftrightarrow 4\sin A\cos A = 4\sin^2 A \Leftrightarrow \cos A = \sin A$

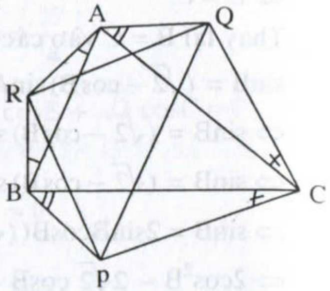
$\Leftrightarrow \tan A = 1$

$\Leftrightarrow A = 45^0.$ (4)

Từ (3) (4) suy ra ABC là tam giác vuông cân đỉnh C $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác đó các tam giác BCP, ABR, CAQ sao cho $\widehat{PBC}=\widehat{CAQ}=45^0$, $\widehat{BCP}=\widehat{QCA}=30^0$, $\widehat{ABR}=\widehat{BAR}=15^0$. Chứng minh QPR là tam giác vuông cân.

Giải



Trong tam giác QAC theo định lí hàm số sin, ta có:

$$\frac{AQ}{\sin 30^0}=\frac{AC}{\sin\widehat{AQC}}.$$

Do $\sin\widehat{AQC}=\sin(180^0-45^0-30^0)=\sin 75^0$

$$\Rightarrow AQ=\frac{b}{2\sin 75^0}.$$

Tương tự ta có: $BP=\dfrac{a}{2\sin 75^0}$.

Dễ thấy trong tam giác cân ARB, thì $RA=RB=\dfrac{AB}{2\cos 15^0}=\dfrac{c}{2\sin 75^0}$.

Theo định lí hàm số cosin trong tam giác RAQ, ta có:

$$RQ^2=AR^2+AQ^2-2AR.AQ.\cos\widehat{RAQ}$$

$$=\frac{c^2}{4\sin^2 75^0}+\frac{b^2}{4\sin^2 75^0}-\frac{2bc}{4\sin^2 75^0}\cos(60^0+A)$$

$$=\frac{1}{4\sin^2 75^0}\left[b^2+c^2-2bc\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4\sin^2 75^0}\left[b^2+c^2-bc\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\sqrt{3}\,\frac{2S}{bc}\right)\right]$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{2(1+\cos 30^0)}. \qquad (1)$$

Tương tự áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác BRP, ta có:

$$RP^2=\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{2(1+\cos 30^0)}. \qquad (2)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác QAC, thì:

$$\frac{QC}{\sin 45^0}=\frac{AC}{\sin\widehat{AQC}}\Rightarrow QC=\frac{b\sqrt{2}}{2\sin 75^0}.$$

Tương tự $PC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin 75^0}$.

Do vậy bằng cách sử dụng định lí hàm số cosin trong tam giác PCQ ta có:

$$PQ^2=QC^2+PC^2-2QC.PC.\cos(60^0+C)$$

Tính toán rồi rút gọn như các phần trên suy ra

$$PQ^2=\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{1+\cos 30^0}. \qquad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra $\begin{cases}RQ=RP\\ PQ^2+RP^2=PQ^2\end{cases}$.

Vậy PQR là tam giác vuông cân ⇒ đpcm.

§ 5. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Giả sử ABC là tam giác vuông. Chứng minh rằng các hệ thức sau đây được thỏa mãn:

1. $\sin A+\sin B+\sin C=2+\dfrac{r}{R}$.
2. $\sin A\sin B\sin C=\dfrac{(2R+r)r}{2R^2}$.
3. $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{r(2R+r)}$.
4. $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{4R+r}{2R+r}$.
5. $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{2R+r}$.
6. $\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\right)\left(\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)\left(\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{4R}{2R+r}$.
7. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{2R+r}{r}$.
8. $\left(\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}\right)\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)\left(\cot\dfrac{C}{2}+\cot\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{4R(2R+r)}{r^2}$.
9. $a\sin A+b\sin B+c\sin C=4R$.
10. $\dfrac{4r_ar_br_c}{r}=(r+r_a+r_b+r_c)^2$.

Giải

Trước hết lưu ý rằng các hệ thức ở vế trái đều là các biểu thức bình đẳng với A, B, C. Điều đó có nghĩa là có thể giả thiết tam giác vuông tại đỉnh nào cũng được. Vì lí do đó ở đây ta luôn giả thiết ABC là tam giác vuông tại A.

1. Ta có: $\sin A+\sin B+\sin C=1+2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$$= 1 + \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}. \qquad (1)$$

Áp dụng công thức $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ thì

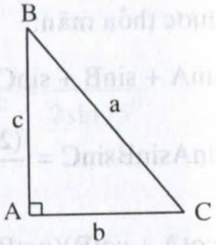
$$2 + \frac{r}{R} = 2 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 2 + 2\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2 + \sqrt{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= 2 + \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} - 1 \qquad (2) \qquad \left(\text{do } \cos\frac{B+C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Nhận xét: Ta có thể giải bằng cách (dựa vào đặc thù của tam giác vuông) như sau:



$\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \frac{b+c}{a}$.

Như vậy:

$\sin A + \sin B + \sin C = 2 + \frac{r}{R}$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{b+c}{a} = 2 + \frac{r}{R}. \qquad (3)$$

Do $R = \frac{a}{2}$; $r = \frac{S}{p} = \frac{bc}{a+b+c}$

Vậy (3) $\Leftrightarrow 1 + \frac{b+c}{a} = 2 + \frac{2bc}{(a+b+c)a}$

$$\Leftrightarrow b + c = \frac{a(a+b+c) + 2bc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = 2bc$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = 2bc$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2. \qquad (4)$$

Theo định lí Pitago thì (4) đúng ⇒ (3) đúng ⇒ đpcm.

2. Ta có: $\sin A\sin B\sin C = \sin B\sin C \qquad (1)$

Mặt khác:

$$\frac{(2R+r)r}{2R^2} = \frac{\left(2R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right).4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2R^2}$$

$$= 4\left(1 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $\sin A\sin B\sin C = \frac{(2R+r)r}{2R^2}$

$$\Leftrightarrow \sin B\sin C = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\sqrt{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\sqrt{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

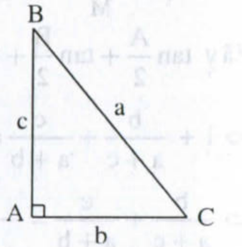
$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sqrt{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\frac{B+C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

Vì (3) đúng suy ra đpcm.

Nhận xét: Ta có thể giải cách khác (dựa vào đặc thù của tam giác vuông) như sau:



$\sin A\sin B\sin C = \frac{(2R+r)r}{2R^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{a^2} = \frac{2\left(a + \frac{bc}{a+b+c}\right)\frac{bc}{a+b+c}}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2\left(a + \frac{bc}{a+b+c}\right).\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 2[a(a+b+c) + bc]$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 2bc + 2a(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = 2bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Từ đó theo định lí Pitago suy ra đpcm.

3. Ta có:

$$(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}.\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}.\frac{\sin(C+A)}{\sin C\sin A}$$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}$$

$$= \frac{1}{\sin A\sin B\sin C}$$

Từ đó và theo phần 2/ suy ra đpcm.

4. Như đã biết trong mọi tam giác ta có:

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{2R+r}\Leftrightarrow p=2R+r. \qquad (2)$$

Do $2R=a$; $r=\dfrac{bc}{a+b+c}$, nên

$$(2)\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2}=a+\frac{bc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2=2a(a+b+c)+2bc,$$

$$\Leftrightarrow (b+c+a)(b+c-a)=2bc$$

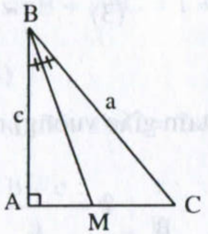
$$\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2 \qquad (3)$$

Vì (3) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Cách giải trên là dựa vào hệ thức (1)

Dựa vào đặc thù của tam giác vuông ta có thể giải như sau:

Vẽ phân giác BM. Theo định lí đường phân giác trong thì:



$$\frac{AM}{MC}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{AM}{AM+MC}=\frac{c}{a+c}$$

$$\Rightarrow AM=\frac{bc}{a+c}\Rightarrow\tan\frac{B}{2}=\frac{AM}{AB}=\frac{b}{a+c}.$$

Tương tự $\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{c}{a+b}$.

Vậy $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{4R+r}{2R+r}$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1+\frac{2R}{2R+r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{a+\dfrac{bc}{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab+b^2+ac+c^2}{(a+c)(a+b)}=\frac{a(a+b+c)}{a(a+b+c)+bc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)}{(a+c)(a+b)}=\frac{a(a+b+c)}{a(a+b+c)+bc}\ (\text{do } b^2+c^2=a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2+ab+ac+bc=a^2+ab+ac+bc. \qquad (3)$$

Vì (3) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

5. Chứng minh tương tự phầ 4/.

6. Ta có: $\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\right)\left(\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)\left(\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{A}{2}\right)$

$$=\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}.\frac{\sin\dfrac{B+c}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}.\frac{\sin\dfrac{C+A}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}}=\frac{1}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

$$=\frac{4}{\sin A+\sin B+\sin C}\ (\text{do } \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})$$

$$=\frac{4}{2+\dfrac{r}{R}}\ (\text{theo phần 1/})$$

$$=\frac{4R}{2R+r}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

7. Ta có trong mọi tam giác thì:

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{r}{2R+r}}=\frac{2R+r}{r}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

8. Ta có:

$$\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}.\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}.\frac{\sin\dfrac{C+A}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\left(\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)^2}. \qquad (1)$$

Ta có: $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)$

$$=\frac{1}{4}\left(2+\frac{r}{R}\right) \qquad (\text{theo phần 1/})$$

$$=\frac{2R+r}{4R}, \qquad (2)$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}\Rightarrow\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2=\frac{r^2}{16R^2}. \qquad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) và có:

$$VP\ (1) = \frac{2R + r}{4R}\frac{16R^2}{r^2} = \frac{4R(2R + r)}{r^2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

9. Ta có:

$$a\sin A + b\sin B + c\sin C = a + 2R\sin^2 B + 2R\sin^2 C$$
$$= a(1 + \sin^2 B + \cos^2 B) = 2a = 4R \Rightarrow \text{đpcm.}$$

10. Áp dụng công thức:

$S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$, ta có:

$$4\frac{r_a r_b r_c}{r} = 4\frac{S^2 p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= 4\frac{S^2 p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4\frac{S^2 p^2}{S^2} = 4p^2.$$

Mặt khác, ta có: $r_a + r_b + r_c = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$ (xem bài 53)

Theo phần 4/ với chú ý là trong tam giác vuông thì $2R + r = p$, nên

$$r_a + r_b + r_c = p.\frac{4R + r}{p} = 4R + r$$

$$\Rightarrow r + r_a + r_b + r_c = 4R + 2r = 2a + \frac{2bc}{a + b + c}$$
$$= 2\frac{a^2 + ab + bc + ca}{a + b + c}.$$

Từ đó ta có: $4\frac{r_a r_b r_c}{r} = (r_a + r_b + r_c)^2$

$$\Leftrightarrow 4p^2 = 4\left(\frac{a^2 + ab + bc + ca}{a + b + c}\right)^2 \Leftrightarrow p = \frac{a^2 + cb + bc + ca}{a + b + c}$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 2(a^2 + ab + bc + ca)$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2. \qquad (1)$$

Vì (1) đúng ⇒ đpcm.

Bình luận: Qua bài trên ta có nhận xét sau:

Để chứng minh các hệ thức ta có thể sử dụng một trong hai phương pháp sau:

1. Dùng các hệ thức lượng giác trong tam giác nói chung đã biết, sau đó áp dụng các tính chất của tam giác vuông (thí dụ như định lí Pitago, $a = 2R$, $\sin B = \cos C$,... nếu $A = 90^0$).
2. Dùng tính chất đặc thù của tam giác vuông để chứng minh.

Bài 2. Cho ABC là tam giác vuông. Chứng minh rằng ta có các hệ thức sau:

1. $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \frac{1}{2R^2}(2R^2 + 4Rr + r^2)$.
2. $\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \frac{1}{2R^2}(2R + r)$.
3. $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = \frac{p}{2R^2}(R - r)(2R + r)$.
4. $(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) = \frac{p}{2R^3}(R + r)(2R + r)$.
5. $\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C + \sin A}{\sin B} = \frac{1}{Rr}(2R^2 + r^2 + Rr)$.
6. $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C = \frac{1}{2R^3}(2R + r)(R - r) - 1$.
7. $(\cos A + \cos B)(\cos B + \cos C)(\cos C + \cos A) = \frac{r}{2R^3}(2R^2 + 3Rr + r^2)$.
8. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{2R^2}{S}$.
9. $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = \frac{4R^4}{S^2} - 2$.
10. $\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C = \frac{R^2}{S^3}(8R^4 - 6S^2)$.
11. $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} = \frac{8R^2 - r^2}{(2R + r)^2}$.
12. $\tan^3\frac{A}{2} + \tan^3\frac{B}{2} + \tan^3\frac{C}{2} = \frac{1}{p^3}(16R^3 + r^3)$.
13. $\cot^2\frac{A}{2} + \cot^2\frac{B}{2} + \cot^2\frac{C}{2} = \frac{1}{r^2}(4R^2 - 4Rr - r^2)$.
14. $\cot^3\frac{A}{2} + \cot^3\frac{B}{2} + \cot^3\frac{C}{2} = \frac{p}{2r^3}(4R^2 - 8Rr + r^2)$.
15. $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{S}(2R^2 + r^2 + 4Rr)$.

Giải

Trong suốt bài này luôn giả thiết ABC là tam giác vuông tại A

1. Ta có: $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \sin B + \sin C + \sin B\sin C$

$$= 2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{2R^2}(2R^2 + 4Rr + r^2) = 1 + \frac{2r}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$

$$= 1 + 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 4\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra hệ thức cần chứng minh có dạng tương đương sau:

$$\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 1 + 4\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) - 1 - 4\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B+C}{2} - 1 - 4\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} - \sqrt{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} + 1 - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow 0 = 0.$ (3)

Từ (3) suy ra đpcm

Nhận xét: Có thể chứng minh hệ thức trên bằng cách thay

$$\sin A = 1,\ \sin B = \frac{b}{a},\ \sin C = \frac{c}{a},\ R = 2a,\ r = \frac{bc}{a+b+c}.$$

Chi tiết xin dành cho các bạn đọc giả.

2. Ta có: $\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \cos B\cos C$ (1)

Lại có (áp dụng như phần 1/)

$$\frac{1}{2R^2}(2Rr + r^2) = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + (1-\cos B)(1-\cos C)$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 - (\cos B + \cos C) + \cos B\cos C$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) + 1 - 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} + \cos B\cos C$$

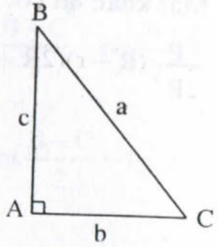
$$= \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} - 1 + 1 - \sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2} + \cos B\cos C$$

$= \cos B\cos C.$ (2)

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Nhận xét: Hệ thức trên có thể chứng minh bằng cách chứng minh hệ thức tương đương sau:

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{1}{2\frac{a^2}{4}}\left(a + \frac{bc}{a+b+c}\right)\frac{bc}{a+b+c}$$



$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2(a^2 + ab + ac + bc)}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$ (*)

Theo định lí Pitago thì (*) đúng ⇒ đpcm.

3. Ta có: $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 1 + \frac{b^3 + c^3}{a^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^3}$ (1)

Mặt khác:

$$\frac{p}{2R^3}(R-r)(2Rr + r^2) = \frac{a+b+c}{4.\frac{a^3}{8}}\left(\frac{a}{2} - \frac{bc}{a+b+c}\right)\left(a + \frac{bc}{a+b+c}\right)$$

$$= \frac{2(a+b+c)}{a^3}\frac{a^2 + ab + ac - 2bc}{2(a+b+c)}\frac{a^2 + ab + ac + bc}{a+b+c}$$

$$= \frac{(a^2 + ab + ac - 2bc)(a^2 + ab + ac + bc)}{a^3(a+b+c)}. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra hệ thức cần chứng minh tương đương với hệ thức sau:

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{(a^2 + ab + ac - 2bc)(a^2 + ab + ac + bc)}{a+b+c}$$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b =$

$= a^4 + 2a^3b + 2a^3c + a^2bc - ab^2c + a^2b^2 + a^2c^2 - 2b^2c^2 - ab^2c$

$\Leftrightarrow b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - a^2(b^2 + c^2) - a^3b - a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b - a^2bc + abc^2$
$+ ab^2c = 0$

$\Leftrightarrow (b^2 + c^2)^2 - a^4 - ab(a^2 - b^2) - ac(a^2 - c^2) + bc(b^2 + c^2) - a^2bc + ab^2c + abc^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^4 - a^4 - abc^2 - acb^2 + a^2bc - a^2bc + ab^2c^2 + abc^2 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0.$

Từ đó suy ra đpcm.

4. Ta có:

$$(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

$$=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3}. \qquad (1)$$

Mặt khác lại có:

$$\frac{p}{2R^3}(R+r)(2R+r)=\frac{2(a+b+c)}{a^3}\left(\frac{a}{2}+\frac{bc}{a+b+c}\right)\left(a+\frac{bc}{a+b+c}\right)$$

$$=\frac{[a(a+b+c)+2bc][a(a+b+c)+bc]}{a^3(a+b+c)}$$

$$=\frac{(a^2+ab+ac+2bc)(a^2+ab+ac+bc)}{a^3(a+b+c)}$$

$$=\frac{(b^2+c^2+2bc+ab+ac)(a^2+ab+ac+bc)}{a^3(a+b+c)}$$

$$=\frac{(b+c)(a+b+c)(a+b)(a+c)}{a^3(a+b+c)}$$

$$=\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{a^3}. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

5. Ta có:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C+\sin A}{\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \qquad (\text{do } A=B+C)$$

$$=\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}. \qquad (1)$$

Lại có:

$$\frac{1}{Rr}(2R^2+r^2+Rr)=\frac{2R}{r}+\frac{r}{R}+1$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+1. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra hệ thức cần chứng minh đưa về dạng tương đương sau:

$$\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)+1$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}-1+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}. \qquad (3)$$

Do $\sin\frac{B+C}{2}=\sin 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ vậy (3) đúng suy ra đpcm.

6.7. Chứng minh tương tự 3, 4.

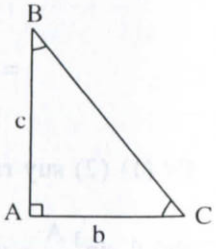
8. Ta có:

$$\cot A+\cot B+\cot C=\cot B+\cot C \qquad (\text{do } \cot A=\cot 90^0=0)$$

$$=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{1}{\sin B\sin C} \qquad (\text{do } \sin(B+C)=\sin A)$$

$$=\frac{2R^2}{2R^2\sin A\sin B\sin C}=\frac{2R^2}{S}\Rightarrow \text{đpcm}.$$

9. Ta có:



$$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C=\cot^2 B+\cot^2 C=\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}$$

$$=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2}=\frac{(b^2+c^2)-2b^2c^2}{b^2c^2}$$

$$=\frac{a^4}{b^2c^2}-2=\frac{4R^4}{S^2}-2\Rightarrow \text{đpcm}$$

$$\left(\text{do } R=\frac{a}{2} \text{ và } S=\frac{bc}{2}\right).$$

10. Chứng minh tương tự như 9.

11. Ta có:

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}$$

$$=\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2-2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{4R+r}{2R+r}\right)^2-2. \qquad \text{(theo phần 4/ bài 1)}$$

Vậy hệ thức cần chứng minh tương đương với hệ thức sau:

$$\left(\frac{4R+r}{2R+r}\right)^2-2=\frac{8R^2-r^2}{(2R+r)^2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (4R+r)^2-2(2R+r)^2=8R^2-r^2$$

$$\Leftrightarrow 16R^2+r^2-8R^2+r^2+9Rr=2(2R+r)^2$$

$$\Leftrightarrow 8R^2+8Rr+2r^2=2(2R+r)^2$$

$$\Leftrightarrow 4R^2+4Rr+r^2=(2R+r)^2 \qquad (2)$$

Rõ ràng (2) đúng vậy (1) đúng ⇒ đpcm.

12. Ta có:

$$\tan^3\frac{A}{2}+\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{C}{2}=1+\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}+\sin^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}+\sin^3\frac{C}{2}\cos^3\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}}. \ (1)$$

Lại thấy:

$$\frac{1}{p^3}(16R^3+r^3)=\frac{1}{64R^3\cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}}\left(\frac{1}{4}+\sin^3\frac{A}{2}\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2}\right)64R^3$$

(ở đây đã áp dụng công thức $p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$; $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$)

$$=\frac{\frac{1}{4}+\sin^3\frac{A}{2}\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra hệ thức cần chứng minh tương đương với hệ thức sau (với chú ý $\sin^3\frac{A}{2}=\cos^3\frac{A}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{4}$)

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}+\sin^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}+\sin^3\frac{C}{2}\cos^3\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}-\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2}\right)+\left(\sin^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}+\sin^3\frac{C}{2}\cos^3\frac{B}{2}\right)\right]=\frac{1}{4} \ (3)$$

Áp dụng hằng đẳng thức ta có:

$$\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}-\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2}$$

$$=\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\left[\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2+3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]$$

$$=\cos\frac{B-C}{2}\left[\cos^2\frac{B-C}{2}+\frac{3}{4}\sin B\sin C\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{8}\sin B\sin C. \qquad (4)$$

Tương tự có:

$$\sin^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}+\sin^3\frac{C}{2}\cos^3\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\sin B\sin C. \ (5)$$

Từ (4) (5) suy ra:

$$\text{VT (3)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}=\text{VP (3)}$$

Từ đó suy ra đpcm.

13. Ta có:

$$\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}=\frac{1}{r^2}[(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2] \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra hệ thức cần chứng minh tương đương với hệ thức sau:

$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2=4R^2-4Rr-r^2 \qquad (2)$$

Áp dụng các công thức quen biết trong mọi tam giác, ta có:

$$p-a=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$p-b=4R\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$p-c=4R\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow 16R^2\left(\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right)$$

$$=4R^2\left(1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right)$$

$$=1-\ 2\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+2\left(\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right)+2\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1 \quad (3)$$

Ta có:

$$\text{VT (3)} = \left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)^2$$

$$+2\left[\left(\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^2-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]+\sqrt{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{B-C}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left[\sin^2\frac{B+C}{2}-\frac{1}{2}\sin B\sin C\right]+\sqrt{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\cos^2\frac{B-C}{2}+\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}+2\sin^2\frac{B+C}{2}-\frac{\cos(B-C)-\cos(B+C)}{2}$$

$$+\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}-1$$

$$=\frac{1}{2}[1+\cos(B-C)]+\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}+1-\frac{1}{2}\cos(B-C)+\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}-1$$

$$= 1 = \text{VP (3)}$$

Vậy (3) đúng ⇒ đpcm.

14. Chứng minh tương tự 12.

15. Ta có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=1+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$$

$$=1+\frac{\sin B+\sin C}{\sin B.\sin C} \qquad (1)$$

Lại có:

$$\frac{1}{S}(2R^2+r^2+4Rr)=\frac{1}{2R^2\sin A\sin B\sin C}(2R^2+r^2+4Rr)$$

$$=\frac{1}{2R^2\sin B\sin C}\left(2R^2+16R^2\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+16R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin B\sin C}\left(1+4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+4\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra hệ thức cần chứng minh tương với hệ thức sau:

$$1+\frac{\sin B+\sin C}{\sin B\sin C}=\left(1+4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+4\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\frac{1}{\sin B\sin C} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sin B\sin C + \sin B + \sin C = 1 + 4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+4\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)]+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1+\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)^2+2\sqrt{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(B-C)+\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}=1+\cos^2\frac{B-C}{2}+\frac{1}{2}$$

$$-\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}+2\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(B-C)=\frac{1+\cos(B-C)}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0=0 \qquad (4)$$

Vì (4) đúng ⇒ (3) đúng ⇒ đpcm.

Bài 3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác vuông ABC, ta có:

1. $r_ar_br_c = r(2R + r)^2$.
2. $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 8R^2 - r^2$.
3. $r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = 16R^3 + r^3$.
4. $(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 4R(2R + r)^2$.
5. $\dfrac{1}{r_ar_b}+\dfrac{1}{r_br_c}+\dfrac{1}{r_cr_a}=\dfrac{4R+r}{r(2R+r)^2}$.
6. $\dfrac{1}{r_a^2}+\dfrac{1}{r_b^2}+\dfrac{1}{r_c^2}=\dfrac{1}{S^2}(4R^2-4Rr-r^2)$.
7. $h_a + h_b + h_c = \dfrac{1}{R}(2R^2+r^2+4Rr)$.
8. $h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a = \dfrac{r}{R}(8R^2+8Rr+2r^2)$.
9. $h_ah_bh_c = \dfrac{r^2}{R}(8R^2+8Rr+2r^2)$.
10. $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{2R^2+Rr+r^2}{Rr}$.

Giải

Luôn giả thiết trong bài này $A = 90^0$.

1. Ta có:

$$r_ar_br_c = p^3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Theo bài 1 phần 5/ thì $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{2R+r}$, vì thế từ (1) có:

$$r_ar_br_c = p^3\frac{r}{2R+r}. \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra: $r_ar_br_c = r(2R+r)^2 \qquad (3)$

$\Leftrightarrow p^3\frac{r}{2R+r} = r(2R+R)^2$

$\Leftrightarrow p^3 = (2R+r)^3$

$\Leftrightarrow p = 2R + r$

$\Leftrightarrow a + b + c = 4R + 2r$

$\Leftrightarrow a + b + c = 2a + \frac{2bc}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 2a(a+b+c) + 2bc$

$\Leftrightarrow (b+c+a)(b+c-a) = 2bc$

$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = 2bc$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2. \qquad (4)$

Theo định lí Pitago (4) ⇒ (3) đúng ⇒ đpcm.

2. Ta có: $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = p^2\left(\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2}\right). \quad (1)$

Theo bài 2 (phần 1/) thì $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} = \frac{8R^2 - r^2}{(2R+r)^2}$, vì thế

$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 8R^2 - r^2 \qquad (2)$

$\Leftrightarrow p^2 = \frac{8R^2 - r^2}{(2R+r)^2} = 8R^2 - r^2$

$\Leftrightarrow p = 2R + r. \qquad (3)$

Theo phần 1/ thì (3) đúng ⇒ (2) đúng ⇒ đpcm.

3. Giải như phần 1/2/ và sử dụng bài 2 (phần 12/).

4. Ta có:

$$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = p^3\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)\left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\right) \quad (1)$$

Áp dụng bài 1/ (phần 6/) ta có:

$$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = p^3\frac{4R}{2R+r}.$$

Từ đó suy ra:

$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 4R(2R+r)^2 \qquad (2)$

$\Leftrightarrow p^3\frac{4R}{2R+r} = 4R(2R+r)^2$

$\Leftrightarrow p^3 = (2R+r)^3$

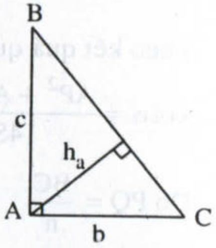
$\Leftrightarrow p = 2R + r. \qquad (3)$

Vì (3) đúng ⇒ (2) đúng ⇒ đpcm.

5. Chứng minh như các phần trên và sử dụng các phần 4/5/ bài 1.

6. Chứng minh như các phần trên.

7. Ta có: $h_b = c$, $h_c = b$; $h_a = \frac{bc}{a}$.



Vậy $h_a + h_b + h_c = b + c + \frac{bc}{a} = \frac{ab+bc+ca}{a}$

Vì vậy: $h_a + h_b + h_c = \frac{1}{R}(2R^2 + r^2 + 4Rr) \qquad (1)$

$\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{a} = \frac{1}{R}(2R^2 + r^2 + 4Rr)$

$\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{a} = \frac{2}{a}\left[\frac{a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{(a+b+c)^2} + \frac{2abc}{a+b+c}\right]$

$\Leftrightarrow ab + bc + ca = a^2 + \frac{2b^2c^2}{(a+b+c)^2} + \frac{4abc}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)(a+b+c)^2 = a^2(a+b+c)^2 + 2b^2c^2 + 4abc(a+b+c)$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) =$

$= a^2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) + 2b^2c^2 + 4abc(a+b+c) \qquad (2)$

Sau khi rút gọn ta sẽ đi đến:

$(2) \Leftrightarrow ab(a^2 + b^2) + ac(c^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + a^2(b^2 + c^2) =$

$= a^4 + a^3b + a^2c + a^2bc. \qquad (3)$

Sử dụng định lí Pitago $b^2 + c^2 = a^2$ suy ra (3) đúng ⇒ đpcm.

Nhận xét: Ta có thể giải lại bằng cách khác như sau:

Ta có: $h_a + h_b + h_c = \frac{ab+bc+ca}{a} = \frac{4R^2(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)}{2R}$

$= 2R(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A) \qquad (*)$

Theo bài 2 (phần 1/) ta có:

$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \frac{1}{2R^2}(2R^2 + 4Rr + r^2)$

Thay lại vào (*) và có: $h_a + h_b + h_c = \frac{1}{R}(2R^2 + 4Rr + r^2)$ ⇒ đpcm.

8.9. Chứng minh tương tự 7.

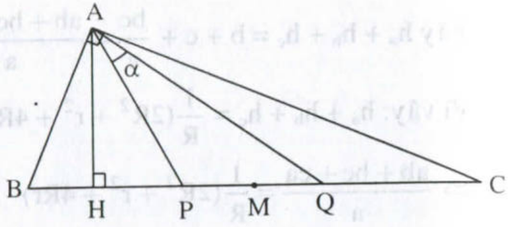
10. Chứng minh tương tự như các phần trên và xin dành cho các bạn đọc giả.

Bài 4. Cho ABC là tam giác vuông đỉnh A, BC = a, đường cao AH = h. Chia cạnh BC ra làm n phần bằng nhau (n là số lẻ). Gọi PQ là một trong các đoạn bằng nhau có chắn trung điểm M của cạnh huyền BC. Đặt $\widehat{PAQ} = \alpha$. Chứng minh: $\tan\alpha = \dfrac{4nh}{(n^2-1)a}$.

Giải

Theo kết quả quen biết, ta có trong tam giác APQ thì:

$$\cot\alpha = \frac{AP^2 + AQ^2 - PQ^2}{4S_{APQ}}. \quad (1)$$



Do $PQ = \dfrac{BC}{n}$

$$\Rightarrow S_{APQ} = \frac{1}{n}S_{ABC} = \frac{1}{n}\frac{ah}{2} = \frac{ah}{2n} \quad (2)$$

Lại có: $AP^2 + AQ^2 - PQ^2 = 2AM^2 + \dfrac{PQ^2}{2} - PQ^2$

$$= 2.\frac{a^2}{4} - \frac{PQ^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2n}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) và có:

$$\cot\alpha = \frac{(n^2-1)a}{4nh} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

§ 6. SỬ DỤNG ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC NHẬN DẠNG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau thì đó là tam giác vuông.

1. $r_c = r + r_a + r_b$.
2. $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$.
3. $r_a + r_b + r_c = 2R(2 + \sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})$.
4. $r_a - r = 2R$.
5. $r_a - r_b = 2R\sin C$.
6. $\dfrac{1+\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}} = \dfrac{p}{4R+r-p}$.
7. $\sin B + \cos B = 1 + \dfrac{r}{R}$.
8. $\begin{cases} \dfrac{r}{r_a} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$.
9. $2R + r = p$.
10. $m_a = \dfrac{b^2+c^2}{4R}$ $(b \neq c)$.

Giải

1. Ta có: $r_c = r + r_a + r_b$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{p-c} = \frac{S}{p} + \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} \Leftrightarrow \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{p(p-c)} = \frac{c}{(p-a)(p-b)} \quad (\text{do } 2p - a - b = c)$$

$\Leftrightarrow p(p-c) = (p-a)(p-b)$

$\Leftrightarrow p(a+b-c) = ab$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c) = 2ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 2ab$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$ (1)

Từ (1) theo định lí Pitago suy ra ABC là tam giác vuông tại C.

Nhận xét:

Ta có cách giải khác như sau: $r_c = r + r_a + r_b$

$$\Leftrightarrow p\tan\frac{C}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} + p\tan\frac{A}{2} + p\tan\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow c\tan\frac{C}{2} = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2R.\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{C}{2} = \cos^2\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan^2\frac{C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{C}{2} = 1 \qquad (\text{do } \tan\frac{C}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow C = 90^0.$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại C.

2. $r + r_a + r_b + r_C = a + b + c$

$$\Leftrightarrow 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) = 8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} - \cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) - \cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2}\\ \cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan\frac{A}{2} = 1\\ \left[\begin{array}{l}B-C=A\\ B-C=-A\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A = 90^0\\ \left[\begin{array}{l}B = A+C\\ C = B+A\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A = 90^0\\ B = 90^0\\ C = 90^0\end{array}\right.$$

Vậy ABC là tam giác vuông ⇒ đpcm.

3. Ta có:

$$r_a + r_b + r_c = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

$$= \frac{a+b+c}{4}\left[\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right) + \left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) + \left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$= 2R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{C+A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\right)$$

$$= R\left(2\cos^2\frac{C}{2} + 2\cos^2\frac{A}{2} + 2\cos^2\frac{B}{2}\right)$$

$$= R(3 + \cos A + \cos B + \cos C)$$

$$= R\left(3 + 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = 4R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra:

$$r_a + r_b + r_c = 2\sqrt{2}R\left(\sqrt{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 4R + 2\sqrt{2}R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = 90^0.$$

Vậy ABC là tam giác vuông đỉnh A ⇒ đpcm.

4. $r_a - r = 2R$

$$\Leftrightarrow p\tan\frac{A}{2} - (p-a)\tan\frac{A}{2} = 2R$$

$$\Leftrightarrow a\tan\frac{A}{2} = 2R \Leftrightarrow 2R.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = 2R$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = 90^0.$$

Vậy ABC là tam giác vuông đỉnh A ⇒ đpcm.

5. Chứng minh tương tự 4/.

6. Chứng minh tương tự 3/, ta có:

$$p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=4R+4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4R+r$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}.$$

Vì thế ta có:

$$\frac{1+\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}=\frac{p}{4R+r-p}\Leftrightarrow\frac{1+\tan^2\frac{B}{2}}{1+\tan\frac{B}{2}}=\frac{4R+r}{p}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\tan^2\frac{B}{2}}{1+\tan\frac{B}{2}}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}-1$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1+\tan^2\frac{B}{2}}{1+\tan\frac{B}{2}}-\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1-\tan\frac{B}{2}}{1+\tan\frac{B}{2}}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

$$\text{Ta lại có: }\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{B}{2}=\tan\frac{A+C}{2}=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}. \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) suy ra:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}\\ \cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan\frac{A}{2}=1\\ \left[\begin{array}{l}B-C=A\\ B-C=-A\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=90^0\\ \left[\begin{array}{l}B=A+C\\ C=B+A\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=90^0\\ B=90^0\\ C=90^0.\end{array}\right.$$

Vậy ABC luôn là tam giác vuông ⇒ đpcm.

7. Ta có: $\sin B+\cos B=1+\frac{r}{R}$

$$\Leftrightarrow \sin B+\cos B=1+\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin B+\cos B=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin B+\cos B=\cos A+\cos B+\cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin B=\cos A+\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}\quad\left(\text{do }\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=A-C\\ B=C-A\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B+C=A\\ B+A=C\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=90^0\\ C=90^0\end{array}\right.$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A, hoặc tại C.

8. Ta có: $\frac{r}{r_a}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{S}{p}}{\frac{S}{p-a}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{p-a}{p}=\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3p-3a=2p$$

$$\Leftrightarrow b+c=2a. \qquad (1)$$

Từ $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{4S}}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow 10S^2=pabc$

$$\Leftrightarrow 10p(p-a)(p-b)(p-c)=pabc$$

$$\Leftrightarrow 10(p-a)(p-b)(p-c)=abc$$

$$\Leftrightarrow 10\frac{a}{2}(p-b)(p-c)=abc \qquad (\text{do } b+c=2a)$$

$$\Leftrightarrow 5[p^2-p(b+c)+bc]=bc. \qquad (*)$$

Do $p^2=\frac{9a^2}{4}$; $p(b+c)=3a^2$ (vẫn do $b+c=2a$), nên thay vào (*) và có:

$$bc=\frac{15a^2}{16}. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) và theo định lí Viet suy ra b, c là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2-2ax+\frac{15a^2}{16}=0. \qquad (3)$$

Dễ thấy (3) có hai nghiệm $x_1=\frac{3a}{4}$; $x_2=\frac{5a}{4}$

Vậy ta có: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b=\dfrac{3a}{4}\\ c=\dfrac{5a}{4}\end{cases}\\ \begin{cases} b=\dfrac{5a}{4}\\ c=\dfrac{3a}{4}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2+a^2=c^2\\ c^2+a^2=b^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=90^0\\ B=90^0\end{array}\right.$

Như thế ABC là tam giác vuông tại B hoặc C ⇒ đpcm.

9. Câu này đã làm trong nhiều bài trước.

10. Ta có: $m_a = \dfrac{b^2+c^2}{4R}$

$\Leftrightarrow m_a = \dfrac{b(2R\sin B)+c(2R\sin C)}{4R}$

$\Leftrightarrow 2m_a = b\sin B + c\sin C$

$\Leftrightarrow 4m_a^2 = (b\sin B + c\sin C)^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = b^2\sin^2B + c^2\sin^2C + 2bc\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc\cos A - b^2\sin^2B - c^2\sin^2C - 2bc\sin B\sin C = 0$

$\Leftrightarrow b^2\cos^2B + c^2\cos^2C - 2bc\cos(C+B) - 2bc\sin B\sin C = 0$

$\Leftrightarrow b^2\cos^2B + c^2\cos^2C - 2bc\cos B\cos C = 0$

$\Leftrightarrow (b\cos B - c\cos C)^2 = 0$

$\Leftrightarrow b\cos B = c\cos C$

$\Leftrightarrow \sin B\cos B = \sin C\cos C$

$\Leftrightarrow \sin 2B = \sin 2C$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2B=2C\\ 2B+2C=180^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=C \text{ (hoặc do } b\neq c)\\ B+C=90^0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow A = 90^0$.

Vậy ABC là tam giác vuông tại A ⇒ đpcm.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau thì đó là tam giác vuông.

1. $\sin A + \sin B + \sin C = \cos A + \cos B + \cos C + 1$.
2. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$.
3. $r(\sin A + \sin B) = \sqrt{2}c\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$.
4. $a\cot A + b\cot B = c\sqrt{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$.

5. $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\sin C) = 15$.
6. $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B$.
7. $\dfrac{\cos B}{\cos C} + \dfrac{\cos C}{\cos B} = \dfrac{a^2}{bc}$.
8. $\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{a}{p-a}$.
9. $\sin B + \cos B = \dfrac{a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)}{abc}$.

Giải

1. Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \cos A + \cos B + \cos C + 1$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2} = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\cos^2\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{C}{2}\left[\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{C}{2}\right] - \sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{C}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{C}{2}\right)\left(\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{C}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{A-B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}\\ \sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{C}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A-B=C\\ A-B=-C\end{array}\right.\\ \tan\dfrac{C}{2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A=B+C\\ B=A+C\end{array}\right.\\ C=90^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=90^0\\ B=90^0\\ C=90^0.\end{array}\right.$

Vậy trong mọi trường hợp ABC luôn là tam giác vuông ⇒ đpcm.

2. Chứng minh tương tự như 1/.

3. Áp dụng công thức $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$, ta có:

$r(\sin A + \sin B) = \sqrt{2}c\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ (1)

$\Leftrightarrow 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}.2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} = \sqrt{2}.2R\sin C\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

Do $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2} > 0$; $\sin\dfrac{B}{2} > 0$; $\sin\dfrac{C}{2} > 0$; $\cos\dfrac{A-B}{2} > 0$

nên (1) $\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow A = 90^0$.

Vậy ABC là tam giác vuông tại A ⇒ đpcm.

4. Chứng minh tương tự 3/.

5. $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$

$\Leftrightarrow (4\sin B + 3\cos B) + (6\sin C + 8\cos C) = 15$

$\Leftrightarrow 5\left(\frac{4}{5}\sin B + \frac{3}{5}\cos B\right) + 10\left(\frac{3}{5}\sin C + \frac{4}{5}\cos C\right) = 15$ (1)

Đặt $\frac{4}{5} = \cos\varphi,\ \frac{3}{5} = \sin\varphi$ với $0 < \varphi < 90^0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 5\sin(B + \varphi) + 10\cos(C - \varphi) = 15$

$\Leftrightarrow 5[1 - \sin(B + \varphi)] + 10[1 - \cos(C - \varphi)] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(B+\varphi) = 1 \\ \cos(C-\varphi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+\varphi = 90^0 \\ C-\varphi = 0^0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow B + C = 90^0 \Rightarrow A = 90^0$.

Vậy ABC là tam giác vuông tại A $\Rightarrow$ đpcm.

6. Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow 2\sin(A + B)\cos(A - B) = 4\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow \sin C\cos(A - B) = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

$\Leftrightarrow \sin C\cos(A - B) = \cos(A - B) + \cos C$

$\Leftrightarrow \cos(A - B)(\sin C - 1) = \cos C$ (1)

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

a. Nếu $\cos C = 0 \Rightarrow \sin C = 1$ (do $\sin C > 0$) vậy (1) đúng

Trường hợp này ABC là tam giác vuông tại C.

b. Nếu $\cos C \neq 0$

Từ (1) có: $\cos(A - B)\cos C(\sin C - 1) = \cos^2 C$

$\Rightarrow \cos(A - B)\cos C(\sin C - 1) = 1 - \sin^2 C$

$\Rightarrow (\sin C - 1)[\cos(A - B)\cos C + \sin C + 1] = 0.$ (2)

Do $\cos C \neq 0 \Rightarrow \sin C - 1 \neq 0$

Từ (2) có: $\cos(A - B)\cos C + \sin C + 1 = 0$ (3)

Ta có: $\cos(A - B)\cos C > -1$, $\sin C > 0 \Rightarrow$ VT (3) > 0.

Vậy (3) không thể thỏa mãn. Trường hợp này bị loại

Tóm lại ABC là tam giác vuông tại C $\Rightarrow$ đpcm.

7. Ta có: $\frac{\cos B}{\cos C} + \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{a^2}{bc}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B\cos C} = \frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B\cos C} = \frac{1 - \cos^2 A}{\sin B\sin C}. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra chỉ có hai khả năng sau:

a. Nếu $A = 90^0$ khi đó (1) đúng vì khi đó

$$\text{VP (1)} = \frac{1}{\sin B\sin C}$$

$$\text{VT (1)} = \frac{\cos^2 B + \sin^2 B}{\sin C\sin B} \text{ (do } \cos C = \sin B;\ \cos B = \sin C)$$

$$= \frac{1}{\sin B\sin C} \Rightarrow \text{VT (1)} = \text{VP (1)}.$$

b. Nếu $A \neq 90^0$ (tức là $\cos A \neq 0$)

Từ (1) và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, thì:

$$\frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B\cos C} = \frac{1 - \cos^2 A}{\sin B\sin C} = \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1}{\cos B\cos C - \sin B\sin C}. \quad (2)$$

Do $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

$\cos B\cos C - \sin B\sin C = \cos(B + C) = -\cos A \neq 0$,

nên từ (2) có: $\frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B\cos C} = 2\cos B\cos C$

$\Rightarrow \cos^2 B + \cos^2 C = 2\cos^2 B\cos^2 C$

$\Rightarrow \cos^2 B - \cos^2 B\cos^2 C + \cos^2 C - \cos^2 B\cos^2 C = 0$

$\Rightarrow \cos^2 B\sin^2 C + \cos^2 C\sin^2 B = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos B\sin C = 0 \\ \cos C\sin B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 90^0 \\ C = 90^0 \end{cases} \text{ (do } \sin B > 0,\ \sin C > 0)$$

$\Rightarrow B = C = 90^0$. (3)

Từ (3) suy ra vô lí vậy trường hợp b không thể xảy ra

Như thế ABC là tam giác vuông tại A $\Rightarrow$ đpcm.

8. $\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{p}{p - a}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow A = 90^0$.

Vậy ABC là tam giác vuông tại A.

9. Như đã biết trong mọi tam giác ta có:

$a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c) = abc(\cos A + \cos B + \cos C)$, nên

$$\sin B + \cos B = \frac{a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \cos B = \cos A + \cos B + \cos C \Leftrightarrow \sin B = \cos A + \cos C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = A - C \\ B = C - A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B + C = A \\ B + A = C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 90^0 \\ C = 90^0. \end{array}\right.$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A hoặc C ⇒ đpcm.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau thì tam giác đó là tam giác vuông hoặc cân.

1. $(a - b)\cot\frac{C}{2} + (c - a)\cot\frac{B}{2} = c - b.$
2. $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B).$
3. $a + b = (a\tan B + b\tan A)\tan\frac{C}{2}.$
4. $a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B.$

Giải

1. Áp dụng kết quả sau: Trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$(a - b)\cot\frac{C}{2} + (b - c)\cot\frac{A}{2} + (c - a)\cot\frac{B}{2} = 0.$$

Khi đó đưa hệ thức đã cho về dạng tương đương sau:

$$(c - b)\cot\frac{A}{2} = c - b$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c - b = 0 \\ \cot\frac{A}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = c \\ A = 90^0. \end{array}\right.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A, hoặc là tam giác vuông đỉnh A ⇒ đpcm.

2. Ta có:

$$(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{(1 - \cos 2A) - (1 - \cos 2B)}{(1 - \cos 2A) + (1 - \cos 2B)} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin(B + A)\sin(A - B)}{2 - (\cos 2A + \cos 2B)} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra có hai khả năng sau:

1. $\sin(A - B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$

2. $\dfrac{2\sin C}{2 - (\cos 2A + \cos 2B)} = \dfrac{1}{\sin C}$

$$\Leftrightarrow 2 - (\cos 2A + \cos 2B) = 1 - \cos 2C$$

$$\Leftrightarrow 1 = \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 C = 2\cos(A + B)\cos(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \cos C\cos(A - B) + \cos^2 C = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C[1 + \cos(A - B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C = 0 \quad (\text{do } 1 + \cos(A - B) > 0)$$

$$\Leftrightarrow C = 90^0$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C hoặc vuông tại C ⇒ đpcm.

3. Ta có: $a + b = (a\tan B + b\tan A)\tan\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow a\left(1 - \tan B\tan\frac{C}{2}\right) + b\left(1 - \tan A\tan\frac{C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A\,\frac{\cos B\cos\frac{C}{2} - \sin B\sin\frac{C}{2}}{\cos B\cos\frac{C}{2}} + \sin B\,\frac{\cos A\cos\frac{C}{2} - \sin A\sin\frac{C}{2}}{\cos A\cos\frac{C}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A\cos\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\cos B} + \frac{\sin B\cos\left(A + \frac{C}{2}\right)}{\cos A} = 0. \quad (1)$$

Do $\left(B + \frac{C}{2}\right) + \left(A + \frac{C}{2}\right) = B + A + C = 180^0$, nên

$$(1) \Leftrightarrow \cos\left(A + \frac{C}{2}\right)\left[\frac{\sin B}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos B}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(A + \frac{C}{2}\right)(\sin B\cos B - \sin A\cos A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(A + \frac{C}{2}\right)(\sin 2B - \sin 2A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(A + \frac{C}{2}\right) = 0 \\ \sin 2B = \sin 2A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A + \frac{C}{2} = 90^0 \\ \left[\begin{array}{l} 2B = 2A \\ 2B + 2A = 180^0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A + \frac{C}{2} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ B + A = 90^0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ C = 90^0. \end{array}\right.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C hoặc là tam giác vuông tại C.

4. Ta có: $a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \dfrac{1-\cos 2A - 1 + \cos 2B}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin(A - B)\sin(A + B)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(A-B)=0\\ \sin(A+B)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ \sin C=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ C=90^0.\end{array}\right.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C, hoặc tam giác vuông tại C.

Bài 4. Chứng minh rằng 10 điều kiện trong bài 1 cũng chính là 10 điều kiện đủ để ABC là tam giác vuông.

Giải

1. Giả sử trong tam giác ABC ta có hệ thức:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 + \frac{r}{R}. \qquad (1)$$

Khi đó vì trong mọi tma giác, ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

nên $(1) \Leftrightarrow 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = 2 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right] - \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{C}{2}\\ \cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan\frac{C}{2} = 1\\ \left[\begin{array}{l}C = A - B\\ C = B - A\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C = 90^0\\ \left[\begin{array}{l}C + B = A\\ C + A = B\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C = 90^0\\ A = 90^0\\ B = 90^0.\end{array}\right.$$

Vậy ABC là tam giác vuông (trong mọi trường hợp) ⇒ đpcm.

2. Xét hệ thức $\sin A\sin B\sin C = \dfrac{(2R + r)r}{2R^2}$. (1)

Vì $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$, nên

$$\frac{(2R+r)r}{2R^2} = \frac{\left(2R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2R^2}$$

$$= 4\left(1 + 2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Vì thế

$$(1) \Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\left(1 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 \qquad (2)$$

Từ (2) theo phần 1/ suy ra ABC là tam giác vuông.

Như vậy kết hợp với bài 1, ta cũng có $\sin A\sin B\sin C = \dfrac{(2R + r)r}{2R^2}$ là điều kiện cần và đủ để ABC là tam giác vuông.

3. Xét hệ thức

$$(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{2R^2}{r(2R + r)} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}.\frac{\sin(C+A)}{\sin C.\sin A} = \frac{2R^2}{r(2R + r)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A\sin B\sin C} = \frac{2R^2}{r(2R + r)}$$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C = \frac{(2R + r)r}{2R^2}. \qquad (2)$$

Từ (2) và theo phần 2/ suy ra ABC là tam giác vuông.

4. Xét hệ thức $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{4R + r}{2R + r}$. (1)

Như đã biết trong mọi tam giác, ta có: $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{4R + r}{p}$. (2)

Từ (2) suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4R + r}{2R + r} = \frac{4R + r}{p}$$

$$\Leftrightarrow 2R + r = p$$

$$\Leftrightarrow 2R+4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra ABC là tam giác vuông.

Kết hợp bài 1, suy ra $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{2R+r}$ là điều kiện cần và đủ để ABC là tam giác vuông.

5. Xét hệ thức $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{2R+r}$. (1)

Ta đã biết trong mọi tam giác ABC, thì

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-b)}}.$$

Vì thế

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=\frac{r}{2R+r}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}}=\frac{r}{2R+r}\Leftrightarrow\frac{S}{p^2}=\frac{r}{2R+r}\Leftrightarrow\frac{pr}{p^2}=\frac{r}{2R+r}$$

$$\Leftrightarrow p=2R+r$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra ABC là tam giác vuông.

Vậy $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{2R+r}$ cũng là điều kiện cần và đủ để ABC là tam giác vuông.

6.7.8. bằng phép tính tương tự ta đều đưa về hệ thức tương tự:

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1.$$

Từ đó suy ra ABC là tam giác vuông.

9. Ta có: asinA + bsinB + csinC = 4R

$\Leftrightarrow \sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$

$\Leftrightarrow$ 2 + 2cosAcosBcosC = 2

$\Leftrightarrow$ cosAcosBcosC = 0

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông

Vậy asinA + bsinB + csinC = 4R cũng là đều kiện cần và đủ để ABC là tam giác vuông.

10. Biến đổi tương tự ta đưa về dạng

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$$

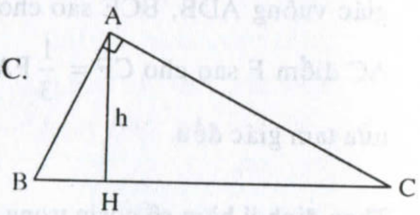
$\Rightarrow$ ABC là tam giác vuông.

Bình luận:

1. Như vậy toàn bộ 10 hệ thức trong bài 1 đều là các điều kiện cần và đủ để ABC là tam giác vuông.
2. Các thí dụ ở đây là hầu hết các hệ thức ấy (9 trong 10 hệ thức) đều có cùng "bắt nguồn" từ hệ thức: $2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$.
3. Các bạn hãy tự nghiệm lại 15 điều kiện nên trong bài 2/ cũng là 15 điều kiện cần và đủ để ABC là tam giác vuông.

Bài 5. Cho tam giác ABC. H là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Gọi p, p_1, p_2 tương ứng là nửa chu vi các tam giác ABC, ABH, ACH và giả sử $p^2=p_1^2+p_2^2$. Chứng minh ABC là tam giác vuông.

Giải



Do $p^2=p_1^2+p_2^2$, suy ra H nằm trong đoạn BC.

Đặt AH = h, thì

$$p=\frac{1}{2}(AB+BH+HC+CA)$$

$$=\frac{1}{2}h\left(\frac{1}{\sin B}+\cot B+\cot C+\frac{1}{\sin C}\right)=\frac{1}{2}h\left(\frac{1+\cos B}{\sin B}+\frac{1+\cos C}{\sin C}\right)$$

$$=\frac{1}{2}h\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right). \quad (1)$$

Lại có $p_1=\frac{1}{2}(AB+BH+AH)=\frac{1}{2}h\left(\frac{1}{\sin B}+\cot B+1\right)$

$$=\frac{1}{2}h\left(1+\text{cpt}\frac{B}{2}\right) \quad (2)$$

Tương tự $p_2=\frac{1}{2}h\left(1+\cot\frac{C}{2}\right)$. (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra $p^2=p_1^2+p_2^2$

$$\Leftrightarrow\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^2=\left(1+\cot\frac{B}{2}\right)^2+\left(1+\cot\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} = \frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}. \quad (4)$$

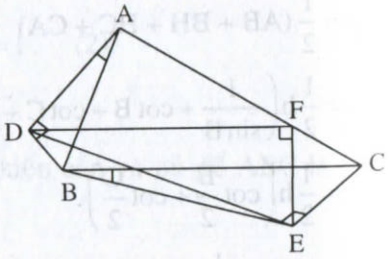
Rõ ràng $1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \neq 0$ vì nếu $1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 0$, thì từ (4) suy ra $\tan\frac{B}{2} = -\tan\frac{C}{2}$ đó là điều vô lí vì $\tan\frac{B}{2} > 0, \tan\frac{C}{2} > 0$.

Vậy (4) $\Leftrightarrow \dfrac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} = 1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{B}{2}+\frac{C}{2} = 45^0 \Leftrightarrow A = 90^0$.

Vậy ABC là tam giác vuông tại A $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 6. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài trên hai cạnh AB, AC hai tam giác vuông ADB, BCE sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{EAB} = 30^0$, $\hat{D} = \hat{E} = 90^0$. Lấy trên AC điểm F sao cho $CF = \frac{1}{3}FA$. Chứng minh DEF là tam giác vuông và là nửa tam giác đều.

Giải



Theo định lí hàm số cosin trong ΔBDE có:

$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2DB.BE\cos\widehat{DBE}$ (1)

Do $DB = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$; $BE = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\widehat{DBE} = 90^0 + \hat{B} \Rightarrow \cos\widehat{DBE} = -\sin B$.

Thay vào (1) đi đến $DE^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}ac\sin B$

$$= \frac{c^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + \sqrt{3}.S. \quad (2)$$

Lập luận tương tự có: $DF^2 = \frac{3c^2}{16} + \frac{9a^2}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{4}S.$ (3)

$$EF^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{c^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{4}S \quad (4)$$

Từ (2) (3) (4) suy ra $\begin{cases} DE^2 = DF^2 + EF^2 \\ DE = 2EF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{DFE} = 90^0 \\ \widehat{FDE} = 30^0. \end{cases}$

Đó là đpcm.

---

§ 7. SỬ DỤNG ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC NHẬN DẠNG TAM GIÁC ĐỀU

Bài 1. (Bài toán cơ bản)

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau thì đó là tam giác đều

1. $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$.
2. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$.
3. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{9}{4}$.
4. $\cos A\cos B\cos C = \frac{1}{8}$.

Giải

1. Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right) + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{A-B}{2} = 0 & (1) \\ 2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2} = 0 & (2). \end{cases}$$

Từ (1) suy ra A = B.

Thay vào (2) và có $\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^0$

Vậy ABC là tam giác đều.

2. Ta có: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{B-C}{2} = 0.$$

Tương tự như phần 1/ suy ra ABC là tam giác đều.

3. $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2A}{2} + \dfrac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = \dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 1 - \cos(A + B)\cos(A - B) + 1 - \cos^2C = \dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 4\cos^2C - 4\cos C\cos(A - B) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow [2\cos C - \cos(A - B)]^2 + \sin^2(A - B) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(A-B)=0\\ 2\cos C=\cos(A-B)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=B\\ \cos C=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow A = B = C$$

Vậy ABC là tam giác đều.

4. Chứng minh tương tự như 1/2/3/.

Nhận xét:

1. Nếu như từ một hệ thức đã cho, ta đưa nó về một trong 4 hệ thức trên, thì tam giác thỏa mãn hệ thức đều là tam giác đều. Bài toán 1 vì lẽ đó nên có tên gọi là "bài toán cơ bản".
2. Dĩ nhiên nếu ABC là tam giác đều thì nó thỏa mãn tất cả các hệ thức trong bài 1. Vì thế 4 hệ thức trong bài trên chính là điều kiện cần và đủ để ABC là tam giác đều.

Bài 2. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các hệ thức sau:

1. $\dfrac{a^2}{r_a - r} + \dfrac{b^2}{r_b - r} + \dfrac{c^2}{r_c - r} = 9R$.
2. $R = 2r$.
3. $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$.
4. $a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) = 3abc$.
5. $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} + 3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{9}{8}$.
6. $p^2 = h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a$.
7. $a\cos^2\dfrac{A}{2} + b\cos^2\dfrac{B}{2} + c\cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{3S}{2r}$.

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

1. Ta có: $\dfrac{a^2}{r_a - r} = \dfrac{a^2}{(p-a)\tan\dfrac{A}{2} - p\tan\dfrac{A}{2}} = \dfrac{a^2}{a\tan\dfrac{A}{2}} = \dfrac{a}{\tan\dfrac{A}{2}}$

$$= \dfrac{2R.2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}} = 4R\cos^2\dfrac{A}{2} = 2R(1+\cos A)$$

Vậy $\dfrac{a^2}{r_a - r} + \dfrac{b^2}{r_b - r} + \dfrac{c^2}{r_c - r} = 9R$

$\Leftrightarrow 2R(2 + \cos A) + 2R(1 + \cos B) + 2R(1 + \cos C) = 9R$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{3}{2}$.

Theo bài 1/ suy ra ABC là tam giác đều.

2. Ta có: $R = 2r$

$\Leftrightarrow R = 8R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Theo bài 1/ suy ra ABC là tam giác đều.

3. Vì $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$, nên

$\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \sin A\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Theo bài 1/ suy ra ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

4. $a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) = 3abc$

$\Leftrightarrow a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 3abc$

$\Leftrightarrow a.2bc\cos A + b.2ac\cos B + c.2ab\cos C = 3abc$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{3}{2}$

Theo bài 1/ suy ra ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

5. Ta có: $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} + 3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{9}{8}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos A}{2} + \dfrac{1-\cos B}{2} + \dfrac{1-\cos C}{2} + 3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{9}{8}$

Áp dụng công thức: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,

thì (1) $\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$.

Theo bài 1/ suy ra ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

6. $p^2 = h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a$

$\Leftrightarrow p^2 = 4S^2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$

$\Leftrightarrow abcp^2 = 4S^2(a + b + c)$

$\Leftrightarrow abcp^2 = 4\frac{abc}{4R}.pr.2p$

$\Leftrightarrow R = 2r$.

Theo phần 2/ suy ra ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

7. $a\cos^2\frac{A}{2} + b\cos^2\frac{B}{2} + c\cos^2\frac{C}{2} = \frac{3S}{2r}$

$\Leftrightarrow a\frac{1+\cos A}{2} + b\frac{1+\cos B}{2} + c\frac{1+\cos C}{2} = \frac{3S}{2r}$

$\Leftrightarrow p + \frac{1}{2}R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = \frac{3S}{2R}$

$\Leftrightarrow p + 2R\sin A\sin B\sin C = \frac{3S}{2r}$

$\Leftrightarrow p + \frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{R} = \frac{S}{2r} + \frac{S}{r} \Leftrightarrow p + \frac{S}{R} = \frac{S}{2r} + p$

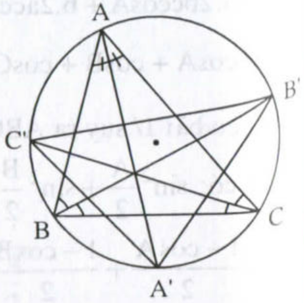
$\Leftrightarrow R = 2r$.

Theo phần 2/ suy ra ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Đường phân giác trong của các góc A, B, C của tam giác lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A′, B′, C′.

Giả sử $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$. Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải



Dễ thấy hai tam giác ABC và A′B′C′ có chung đường tròn ngoại tiếp và ta gọi R là bán kính của đường tròn này. Ta có:

$S_{ABC} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$, (1)

$S_{A'B'C'} = 2R^2\sin A'\sin B'\sin C'$. (2)

Do $A' = \frac{B+C}{2}$; $B' = \frac{C+A}{2}$; $C' = \frac{A+B}{2}$

Vậy $S_{A'B'C'} = 2R^2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}$

$= 2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$. (3)

Từ (1), (3) có: $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$

$\Leftrightarrow 2R^2\sin A\sin B\sin C = 2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$.

Theo bài 1/ suy ra ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

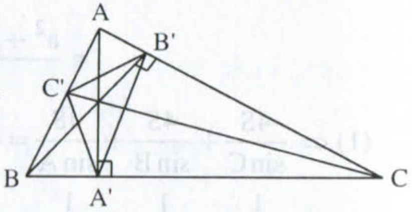
Bài 4. Cho ABC là tam giác nhọn. Gọi AA′, BB′, CC′ là ba chiều cao của nó.

Giả sử $S_{A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Từ $S_{A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S} + \frac{S_{BC'A'}}{S} + \frac{S_{CA'B'}}{S} = \frac{3}{4}$ (ở đây $S_{ABC} = S$)

$\Rightarrow \frac{AB'.AC'}{AB.AC} + \frac{BA'.BC'}{BA.BC} + \frac{CA'.CB'}{CA.CB} = \frac{3}{4}$



$\Rightarrow \cos A.\cos A + \cos B.\cos B + \cos C.\cos C = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{9}{4}$.

Theo bài 1/ suy ra ABC là tam giác đều ⇒ đpcm

Nhận xét: Các bài 2, 3, 4 là các ví dụ minh họa sử dụng bài 1, và cho ta thấy rõ vì sao bài 1 lại gọi là “bài toán cơ bản”.

Bài 5. (Bài toán cơ bản)

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn một trong hai điều kiện:

1. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \sqrt{3}$. 2. $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$.

thì ABC là tam giác đều.

Giải

1. Ta có: $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) = 3$

Do $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$, nên

$$(1) \Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{C}{2} \Leftrightarrow A=B=C$$

⇔ ABC là tam giác đều.

2. Chứng minh tương tự phần 1.

Bài 6. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Dễ thấy hệ thức đã cho tương đương với hệ thức sau:

$$2ab+2ac+2bc=a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S \qquad (1)$$

$$\text{Do } \cot A+\cot B+\cot C=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}, \text{ nên}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4S}{\sin C}+\frac{4S}{\sin B}+\frac{4S}{\sin A}=4S(\cot A+\cot B+\cot C)+4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A}=\cot A+\cot B+\cot C+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A}-\cot A\right)+\left(\frac{1}{\sin B}-\cot B\right)+\left(\frac{1}{\sin C}-\cot C\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}.$$

Theo bài 5/ suy ra ABC là tam giác đều.

Bài 7. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}S$.

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Theo bài 6, ta có:

$$a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow 4S(\cot A+\cot B+\cot C)=4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow \cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$$

Theo bài 5/ suy ra ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

Nhận xét: Bài 6, bài 7 là một ví dụ minh họa cho bài cơ bản 6.

Bài 8. Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC, ta có hệ thức:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=3\sqrt{3}S$$

thì ABC là tam giác đều.

Giải

Ta có: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3\sqrt{3}S$

$$\Leftrightarrow \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}=3\sqrt{3}\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2+3b^2+3c^2}{4}=\frac{3\sqrt{3}ab\sin C}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=2\sqrt{3}\,ab\sin C$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos C=2\sqrt{3}\,ab\sin C$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-ab(\cos C+\sqrt{3}\sin C)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+2ab\left[1-\left(\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+2ab[1-\cos(C-60^0)]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 1-\cos(C-60^0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ \cos(C-60^0)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ C=60^0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ABC là tam giác đều} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 9. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $\sqrt{3}h_a+\frac{a}{2}=b+c.$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Ta có: $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R\sin A}=2R\sin B\sin C$

Vì thế $\sqrt{3}h_a+\frac{a}{2}=b+c$

$$\Leftrightarrow 2R\sqrt{3}\sin B\sin C+R\sin A=2R(\sin B+\sin C)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,\sin B\sin C + \frac{1}{2}\sin A = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C + \frac{1}{2}\sin(B + C) - \sin B - \sin C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C + \frac{1}{2}\sin B\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C + \frac{1}{2}\sin C\cos B - \sin B - \sin C = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\frac{1}{2}\cos C\right)\right]+\sin C\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin B[1 - \sin(C + 30^0)] + \sin C[1 - \sin(B + 30^0)] = 0 \qquad (1)$$

Từ (1) và do $\sin B > 0$; $\sin C > 0$, nên suy ra

$$\begin{cases}1-\sin(C+30^0)=0\\ 1-\sin(B+30^0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C+30^0=90^0\\ B+30^0=90^0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow B = C = 60^0 \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Đó là đpcm.

Bài 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{b^2\cos\frac{C-A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=a^2+b^2+c^2.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Ta có: $\dfrac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}=a\dfrac{2R\sin A\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}=aR2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$$=aR2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=aR(\sin B+\sin C)=\frac{ab+ac}{2}.$$

Tương tự ta có: $\dfrac{b^2\cos\frac{C-A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{bc+ba}{2}$; $\dfrac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{ca+cb}{2}$.

Vậy hệ thức đã cho có dạng tương đương sau:

$$\frac{ab+ac}{2}+\frac{bc+ba}{2}+\frac{ca+cb}{2}=a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 11. Giả sử A, B, C là ba góc (đo bằng rad) của tam giác ABC và thỏa

$$\frac{A\sin A+B\sin B}{A+B}+\frac{B\sin B+C\sin C}{B+C}+\frac{C\sin C+A\sin A}{C+A}=\sin A+\sin B+\sin C.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Nhân cả hai vế của đẳng thức đã cho với 2R và dùng định lý hàm số sin, ta có:

$$\frac{Aa+Bb}{A+B}+\frac{Bb+Cc}{B+C}+\frac{Cc+Aa}{C+A}=a+b+c.$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{Aa+Bb}{A+B}-\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{Bb+Cc}{B+C}-\frac{b+c}{2}\right)+\left(\frac{Cc+Aa}{C+A}-\frac{c+a}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(A-B)(a-b)}{2(A+B)}+\frac{(B-C)(b-c)}{2(B+C)}+\frac{(C-A)(c-a)}{2(C+A)}=0 \qquad (1)$$

Theo mối quan hệ giữa cạnh và góc của tam giác ta có:

mỗi phân số có mặt trong (1) đều ≥ 0; vì thế từ (1) suy ra

$$(A - B)(a - b) = (B - C)(b - c) = (C - A)(c - a) = 0$$

$\Rightarrow A = B = C \Rightarrow$ ABC là tam giác đều $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 12. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases}a^2=\dfrac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}\\ a=2b\cos C.\end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Từ $a^2=\dfrac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}\Rightarrow a^3-(b^3+c^3)=a^3-a^2(b+c)$

$$\Rightarrow b^3 + c^3 = a^2(b + c)$$

$$\Rightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c)$$

$$\Rightarrow b^2 - bc + c^2 = a^2$$

$$\Rightarrow b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0.$$

Bây giờ từ hệ thức $a = 2b\cos C$

$\Rightarrow \sin A = 2\sin B\cos C$

$\Rightarrow \sin A = \sin(B + C) + \sin(B - C)$

$\Rightarrow \sin(B - C)$. (do $\sin(B + C) = \sin A$)

$\Rightarrow B = C$ (2)

Từ (1) (2) suy ra ABC là tam giác đều $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 13. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases}\sin B+\sin C=2\sin A\\ \cos B+\cos C=2\cos A\end{cases}.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Từ giả thiết thứ nhất và thứ hai, ta có:

Từ giả thiết suy ra:

$$(\sin B+\sin C)^2+(\cos B+\cos C)^2=4(\sin^2 A+\cos^2 A)$$

$$\Rightarrow 2+2\sin B\sin C+2\cos B\cos C=4$$

$$\Rightarrow \cos(B-C)=1$$

$$\Rightarrow B-C=0$$

$$\Rightarrow B=C \qquad (1)$$

Thay lại vào điều kiện ban đầu có: $\begin{cases}2\sin B=2\sin A\\ 2\cos B=2\cos A\end{cases}\Rightarrow B=A. \qquad (2)$

Từ (1) (2) đi đến ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

Bài 14. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases}\sin B+\sin C=2\sin A\\ \tan B+\tan C=2\tan A\end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Từ điều kiện $\sin B+\sin C=2\sin A$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)=2\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) \qquad \left(\text{do } \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}>0\right)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Từ điều kiện: $\tan B+\tan C=2\tan A$

$$\Rightarrow \tan B+\tan C=-2\tan(B+C)$$

$$\Rightarrow \tan B+\tan C=2\frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}$$

$$\Rightarrow \tan B\tan C=3$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}\cdot\frac{2\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}=3$$

$$\Rightarrow 4\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=3\left[1-\left(\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\right)+\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\right]. \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) và chú ý rằng

$$\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}=\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2-2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2},$$

suy ra $\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2=\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad (3)$$

$\left(\text{do } \tan\frac{B}{2}>0,\ \tan\frac{C}{2}>0\right).$

Từ (1), (3) và theo định lí Viet, thì $\tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=0$

Từ đó $\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B=C=60^0$

⇒ ABC là tam giác đều ⇒ đpcm.

Chương 4. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

§ 1. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KHÔNG ĐIỀU KIỆN

A. Các bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác

Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày các bất đẳng thức lượng giác rất cơ bản trong một tam giác. Nó thường xuyên được sử dụng trong việc nghiên cứu các bất đẳng thức hình học nói chung và trong tam giác nói riêng.

Bài 1. Trong mọi tam giác ABC ta có các hệ thức sau:

1. $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.
2. $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$.
3. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.
4. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$.

Dấu bằng xảy ra trong các bất đẳng thức trên khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Giải

1. Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (1)

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0 \quad (2)$$

Vì (2) hiển nhiên đúng, vậy (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2} = 0 \\ \sin\frac{A-B}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2.3.4 Chứng minh tương tự 1/.

Bài 2. Trong mọi tam giác ABC, ta có:

1. $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$.
3. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra trong các bất đẳng thức trên khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Giải

1. Ta có mệnh đề sau:

a. Nếu $x, y \in [0; \pi]$ thì $\frac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$,

b. Nếu $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $\frac{\cos x + \cos y}{2} \le \cos\frac{x+y}{2}$.

Dấu bằng xảy ra trong các bất đẳng thức trên khi và chỉ khi x = y.

Áp dụng mệnh đề trên ta có:

$$\frac{\frac{\sin A + \sin B}{2} + \frac{\sin C + \sin\frac{\pi}{3}}{2}}{2} \le \frac{\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}{2} \le \sin\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3} \le 4\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2/3 Chứng minh tương tự 1/.

Bài 3. Trong mọi tam giác ABC ta có các hệ thức sau:

1. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$,
2. $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Giải

1. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 \ge 3 \qquad \left(\text{do } \tan\frac{A}{2} > 0, \tan\frac{B}{2} > 0, \tan\frac{C}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} - \left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) \ge 0$$

$$\left(\text{do } \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)^2 \geq 0 \qquad (2)$$

Vì (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

2. Trước hết ta chứng minh trong mọi tam giác thì

$\cot A + \cot B + \cot C > 0 \qquad (3)$

Thật vậy nếu ABC là tam giác nhọn thì (3) hiển nhiên đúng

Nếu ABC không phải là tam giác nhọn khi đó giả sử $A \geq 90^0$, thì B, C là nhọn và $0 < B + C \leq 90^0$.

Ta có: $\cot A = -\cot(B + C)$, nên

$\cot A + \cot B + \cot C = \cot B + \cot C - \cot(B + C)$

Ta có: $\cot B > 0$ và do $90^0 \geq B + C > C \Rightarrow \cot(B + C) < \cot C$

$\Rightarrow \cot C - \cot(B + C) > 0 \Rightarrow \cot B + \cot C - \cot(B + C) > 0$, vậy (3) đúng

Vì lẽ đó $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3$.

Sau đó làm như trong phần 1/ với chú ý là

$\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$ suy ra đpcm.

Bài 4. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $\cos A + \cos B + \cos C > 1$.
2. $\cos A\cos B\cos C > -1$.
3. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$.
4. $\sin A + \sin B + \sin C > 0$.
5. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 1$.
6. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > 2$.

và các bất đẳng thức trên không thể làm "tốt hơn"

Giải

1. Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (1)$

Hiển nhiên trong mọi tam giác ta có: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$, do đó từ (1) suy ra

$\cos A + \cos B + \cos C > 1$

Ta có: $0 < \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} < \sin\frac{A}{2}$

Mặt khác: $\lim\limits_{A\to 0^+}\left(\sin\frac{A}{2}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{A\to 0^+}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = 0$.

Vậy bất đẳng thức trên không thể làm tốt hơn.

Nhận xét: Ta hãy hiểu thế nào là bất đẳng thức không thể làm "tốt hơn".

- Bất đẳng thức $f(A, B, C) > \alpha$ đối với mọi tam giác ABC gọi là không thể làm "tốt hơn" nếu như $\forall\varepsilon > 0$, tồn tại tam giác $A_0B_0C_0$ sao cho

$$f(A_0, B_0, C_0) \leq \alpha + \varepsilon \qquad (1)$$

- Bất đẳng thức $f(A, B, C) > \beta$ đối với mọi tam giác ABC gọi là không thể làm "tốt hơn" nếu như $\forall\varepsilon > 0$, tồn tại tam giác $A_0B_0C_0$ sao cho

$$f(A_0, B_0, C_0) \geq \beta - \varepsilon \qquad (2)$$

Vì thế chẳng hạn để chứng minh bất đẳng thức $f(A, B, C) > \alpha$ đối với mọi tam giác ABC gọi là không thể làm "tốt hơn" ta tiến hành theo hai bước sau:

1. Chứng minh với mọi tam giác ABC, ta có: $f(A, B, C) > \alpha$
2. Chứng minh có (1). Để làm điều này có nhiều cách, tuy nhiên cách mà ta hay sử dụng là: Chứng minh rằng tồn tại một họ tam giác $A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon$ (phụ thuộc vào ε, với $\varepsilon > 0$ đủ bé)sao cho với họ này ta có:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon) = \alpha$$

2. Ta có với mọi tam giác ABC thì:

$|\cos A\cos B\cos C| = |\cos A|.|\cos B|.|\cos C| < 1$

$\Rightarrow \cos A\cos B\cos C > -1. \qquad (1)$

Mặt khác xét họ tam giác ABC với $A = 180^0 - 2\alpha$; $B = C = \alpha$ với $\alpha > 0$ đủ bé.

Khi đó: $\cos A\cos B\cos C = \cos(180^0 - 2\alpha)\cos^2\alpha = -\cos 2\alpha\cos^2\alpha$

Từ đó $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}(\cos A\cos B\cos C) = -\lim\limits_{\alpha\to 0^+}(\cos 2\alpha)(\cos^2\alpha) = -1$

Vậy bất đẳng thức (1) không thể làm "tốt hơn" $\Rightarrow$ đpcm.

3.4. Chứng minh tương tự ½.

5. Ta có: $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{C+A}{2} + \cos\frac{A+B}{2}$

$$= \cos A' + \cos B' + \cos C',$$

với $A' = \frac{B+C}{2}$; $B' = \frac{C+A}{2}$; $C' = \frac{A+B}{2}$

Rõ ràng $A' > 0$, $B' > 0$, $C' > 0$ và $A' + B' + C' = A + B + C = 180^0$ nên có thể coi A′, B′, C′ là ba góc của một tam giác A′B′C′ khác.

Theo phần 1/ suy ra $\cos A' + \cos B' + \cos C' > 1$

$\Rightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 1 \Rightarrow$ đpcm.

Xét họ tam giác ABC với $A = 180^0 - 2\alpha$; $B = C = \alpha$ với $\alpha > 0$ đủ bé

Với họ này ta có:

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)=\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)=1$$

Vậy bất đẳng thức $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}>1$ không thể làm "tốt hơn"

6. Do $0<\cos\frac{A}{2}<1, 0<\cos\frac{B}{2}<1, 0<\cos\frac{C}{2}<1$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>\frac{3+(\cos A+\cos B+\cos C)}{2}>2 \text{ (theo phần 1/)}$$

Cho họ tam giác ABC với $A=180^0-2\alpha$, $B=C=\alpha$, với $\alpha>0$ đủ bé suy ra

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)=\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2$$

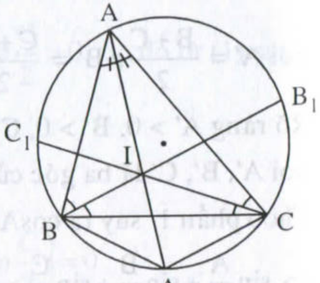
$\Rightarrow$ Bất đẳng thức $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>2$ không thể làm "tốt hơn".

B. Bất đẳng thức lượng giác trong các bài toán hình học phẳng

Trong mục này chúng ta xét các bài toán bất đẳng thức lượng giác, hoặc bất đẳng thức không có dạng lượng giác nhưng chứng minh nó thì hoàn toàn dựa vào phép biến đổi các hệ thức lượng giác trong tam giác. Các bất đẳng thức này gắn chặt với một bài toán hình học phẳng tương ứng. Như vậy để giải chúng thì có sự phối hợp giữa lượng giác và hình học phẳng (nó phân biệt với các bài toán thuần túy về bất đẳng thức lượng giác mà về mặt hình thức có thể thấy ngay trong các bài toán ấy không hề có một hình vẽ nào cả).

Bài 1. Cho tam giác ABC. Ba đường phân giác trong của các góc A, B, C lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh $AA_1.BB_1.CC_1 \geq 16R^2r$.

Giải



Áp dụng định lí Ptoleme với tứ giác nội tiếp ABA_1C, ta có:

$$AA_1.BC = AB.A_1C + AC.A_1B \quad (1)$$

Ta có: $A_1B = A_1C$, nên từ (1) có:

$$AA_1=\frac{A_1B(AB+AC)}{BC} \quad (2)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔABA_1 (với chú ý bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác này cũng chính là R), ta có:

$$A_1B = 2R\sin\frac{A}{2}. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) và có: $AA_1=\frac{b+c}{a}2R\sin\frac{A}{2}$. (4)

Lập luận tương tự có: $BB_1=\frac{c+a}{2}2R\sin\frac{B}{2}$, (5)

$$CC_1=\frac{a+b}{2}2R\sin\frac{C}{2}. \quad (6)$$

Nhân từng vế (4) (5) (6) suy ra:

$$AA_1.BB_1.CC_1=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}2R^2\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \quad (7)$$

Trong mọi ΔABC, thì $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (8)

Từ (7) (8) đi đến $AA_1.BB_1.CC_1=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}2R^2r$ (9)

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

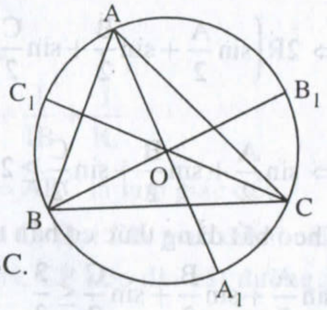
$b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ca}$, $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (10)

Từ (9) (10) suy ra $AA_1.BB_1.CC_1 \geq 16R^2r \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow b=c=a \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Kết quả nói trên vẫn đúng nếu thay ba đường phân giác bởi ba đường trung trực, tức thay tâm đường tròn nội tiếp I bằng tâm O đường tròn ngoại tiếp.



Khi đó $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 2R$.

Vậy $AA_1.BB_1.CC_1 = 8R^3$.

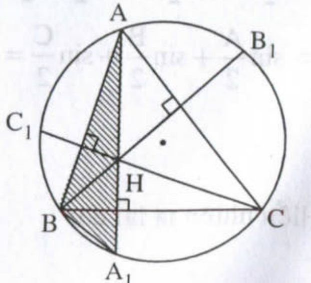
Do $R\geq 2r \Rightarrow 8R^3 \geq 16R^2r$.

$\Rightarrow AA_1.BB_1.CC_1 \geq 16R^2r$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow R = 2r$.

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2. Nếu thay I bởi trực tâm H của tam giác nhọn ABC.



Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔABA_1, ta có:

$$AA_1 = 2R\sin\widehat{ABA_1}=2R\sin\left(B+\widehat{A_1BC}\right)$$
$$=2R\sin\left(B+\widehat{HAC}\right)$$
$$=2R\sin(B+90^0-C)$$
$$=2R\cos(B-C).$$

Tương tự có: $BB_1 = 2R\cos(C-A)$

$$CC_1 = 2R\cos(A-B).$$

Từ đó $AA_1.BB_1.CC_1 = 8R^3\cos(B - C)\cos(C - A)\cos(A - B)$

Ta có thể chứng minh được bất đẳng thức sau đây trong mọi tam giác nhọn

$$\cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A) \le 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra $AA_1.BB_1.CC_1 \le 8R^3.8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 16R^2r$.

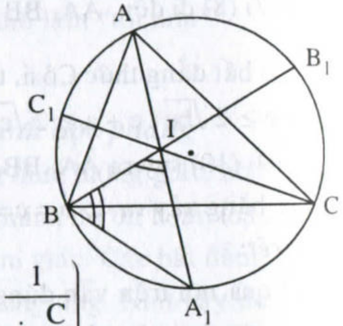
Vậy nếu thay I bởi trực tâm H và giả thiết ABC là tam giác nhọn ta có bất đẳng thức nhưng với chiều ngược lại.

Bài 2. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. AI, BI, CI kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt tại A_1, B_1, C_1.

Chứng minh: $IA_1 + IB_1 + IC_1 \ge IA + IB + IC$.

Giải

Dễ thấy $IA = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}$; $IB = \dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}$; $IC = \dfrac{r}{\sin\frac{C}{2}} \Rightarrow IA_1 = A_1B$



Lại thấy $A_1B = 2R\sin\frac{A}{2} \Rightarrow IA_1 = 2R\sin\frac{A}{2}$.

Tương tự $IB_1 = 2R\sin\frac{B}{2}$; $IC_1 = 2R\sin\frac{C}{2}$.

Vậy $IA_1 + IB_1 + IC_1 \ge IA + IB + IC$

$$\Leftrightarrow 2R\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) \ge r\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2R\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) \ge 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \ge 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, ta có:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = \frac{2}{3}.\frac{3}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\ge \frac{2}{3}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Hiển nhiên ta lại có:

$$\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2 \ge 3\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right). \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \ge 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$

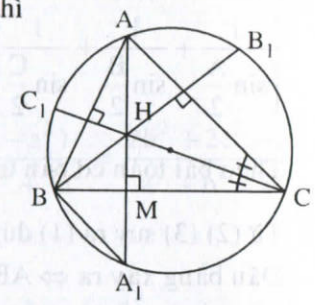
Vậy (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Nếu ABC là tam giác nhọn và thay I bằng trực tâm H, thì ta có bất đẳng thức với dấu ngược lại, tức là $HA + HB + HC \ge HA_1 + HB_1 + HC_1$.

   Thật vậy do HAC, HAB, HBC và ABC có các vòng tròn ngoại tiếp bằng nhau, nên áp dụng định lí hàm số sin trong ΔHAC, thì



   $HA = 2R\sin\widehat{HCA} = 2R\cos A$.

   Tương tự $HB = 2R\cos B$; $HC = 2R\cos C$.

   Lại có $HA_1 = 2HM = 2HC\sin\widehat{HCM}$

   $= 2.2R\sin\widehat{HAC}.\cos B = 4R\cos C\cos B$.

   Tương tự $HB_1 = 4R\cos C\cos A$; $HC_1 = 4R\cos A\cos B$.

   Vậy $HA + HB + HC \ge HA_1 + HB_1 + HC_1$

   $\Leftrightarrow 2R(\cos A + \cos B + \cos C) \ge 4R(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$

   $\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \ge 2\cos A\cos B + 2\cos B\cos C + 2\cos C\cos A \quad (4)$

   (4) được chứng minh tương tự như trên với chú ý:

   $0 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

2. Hoàn toàn tương tự, ta có các bất đẳng thức sau

   $IA_1.IB_1.IC_1 \ge IA.IB.IC$; $\dfrac{1}{IA_1} + \dfrac{1}{IB_1} + \dfrac{1}{IC_1} \le \dfrac{1}{IA} + \dfrac{1}{IB} + \dfrac{1}{IC}$.

   Dấu bằng xảy ra trong hai bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác AM, BN, CP. Giả sử AM, BN, CP kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tại A′, B′, C′ tương ứng. Chứng minh:

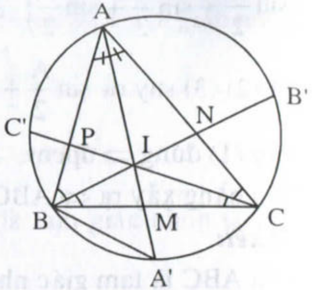
$$\frac{1}{IA'} + \frac{1}{IB'} + \frac{1}{IC'} \ge \frac{3}{R}.$$

Giải

Ta có: $\widehat{BIA'} = \widehat{IBA'} \Rightarrow IA' = A'B$.

Lập luận như các bài trên có: $IA' = 2R\sin\frac{A}{2}$.

Tương tự $IB' = 2R\sin\frac{B}{2}$; $IC' = 2R\sin\frac{C}{2}$.



Vậy $\frac{1}{IA'}+\frac{1}{IB'}+\frac{1}{IC'}\ge\frac{3}{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\ge\frac{3}{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 6. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi có:

$$\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\ge 9. \quad (2)$$

Theo bài toán cơ bản trong mục A, thì $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$. (3)

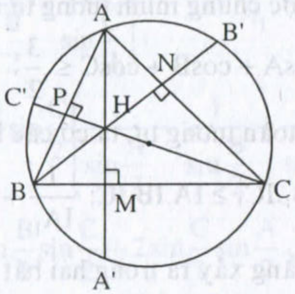
Từ (2) (3) suy ra (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Nếu ABC là tam giác nhọn và thay các đường phân giác bằng các đường cao (và gọi H là trực tâm). Khi đó ta có:

$$\frac{1}{HA'}+\frac{1}{HB'}+\frac{1}{HC'}\ge\frac{3}{R}.$$



Thật vậy theo các bài trên ta có:

$HA' = 4R\cos B\cos C$;

$HB' = 4R\cos C\cos A$;

$HC' = 4R\cos A\cos B$.

Từ đó theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{HA'}+\frac{1}{HB'}+\frac{1}{HC'}=\frac{1}{4R}\left(\frac{1}{\cos B\cos C}+\frac{1}{\cos C\cos A}+\frac{1}{\cos A\cos B}\right)$$

$$\ge\frac{3}{4R}\sqrt[3]{\frac{1}{(\cos A\cos B\cos C)^2}}. \quad (4)$$

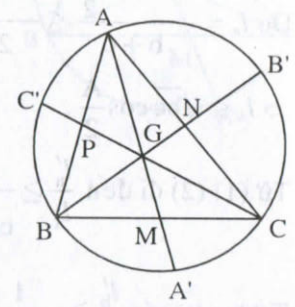
Theo bất đẳng thức cơ bản trong tam giác (và do ABC là tam giác nhọn), ta có: $0<\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$. (5)

Từ (4) (5) suy ra $\frac{1}{HA'}+\frac{1}{HB'}+\frac{1}{HC'}\ge\frac{3}{R}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2. Nếu thay các phân giác bằng các trung tuyến và I thay bằng trọng tâm của tam giác. Khi đó ta vẫn có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{GA'}+\frac{1}{GB'}+\frac{1}{GC'}\ge\frac{3}{R}.$$



Ta có theo hệ thực lượng trong đường tròn

$$MA.MB' = MB.MC = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow MA' = \frac{a^2}{4MA} = \frac{a^2}{4m_a}$$

$$\Rightarrow GA' = GM + MA' + \frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a}$$

$$\Rightarrow \frac{GA}{GA'} = \frac{\frac{2}{3}m_a}{\frac{1}{3}m_a+\frac{a^2}{4m_a}} = \frac{8m_a^2}{4m_a^2+3a^2} = \frac{2(2b^2+2c^2-a^2)}{2b^2+2c^2-a^2+3a^2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{GA}{GA'}+\frac{GB}{GB'}+\frac{GC}{GC'}=\frac{(2b^2+2c^2-a^2)+(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$= 3 \quad (6)$$

Lại có: $\frac{AA'}{GA'}+\frac{BB'}{GB'}+\frac{CC'}{GC'}=1+\frac{GA}{GA'}+1+\frac{GB}{GB'}+1+\frac{GC}{GC'}=6$ (7) (do (6))

Do $AA'\le 2R$; $BB'\le 2R$; $CC'\le 2R$

$$\Rightarrow 6=\frac{AA'}{GA'}+\frac{BB'}{GB'}+\frac{CC'}{GC'}\le 2R\left(\frac{1}{GA'}+\frac{1}{GB'}+\frac{1}{GC'}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{GA'}+\frac{1}{GB'}+\frac{1}{GC'}\ge\frac{3}{R} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

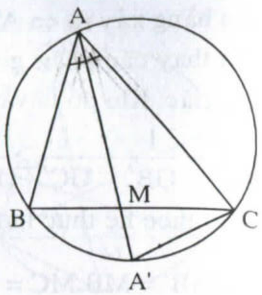
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Ba đường phân giác trong AM, BN, CP kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tương ứng tại A′, B′, C′.

Đặt $AA' = l'_a$, $BB' = l'_b$, $CC' = l'_c$. Chứng minh $\frac{l'_a}{l_a}+\frac{l'_b}{l_b}+\frac{l'_c}{l_c}\ge 4$.

Giải

Ta có $\Delta ABM \backsim \Delta AA'C \Rightarrow \frac{AB}{AA'}=\frac{AM}{AC}\Leftrightarrow\frac{c}{l'_a}=\frac{l_a}{b}\Leftrightarrow l'_a=\frac{bc}{l_a}$



$$\Rightarrow \frac{l'_a}{l_a} = \frac{bc}{l_a^2}. \qquad (1)$$

Do $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \le \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{2\sqrt{bc}}$

$$\Rightarrow l_a \le \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) đi đến $\dfrac{l'_a}{l_a} \ge \dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}$. (3)

Tương tự có: $\dfrac{l'_b}{l_b} \ge \dfrac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}, \dfrac{l'_c}{l_c} \ge \dfrac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $\dfrac{l'_a}{l_a} + \dfrac{l'_b}{l_b} + \dfrac{l'_c}{l_c} \ge \dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$. (5)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right) \ge 9. \qquad (6)$$

Do $\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{3 + (\cos A + \cos B + \cos C)}{2} \le \dfrac{9}{4}$. (7)

Từ (5) (6) (7) suy ra $\dfrac{l'_a}{l_a} + \dfrac{l'_b}{l_b} + \dfrac{l'_c}{l_c} \ge 4 \Rightarrow$ đpcm.

Dễ thấy từ các lập luận trên thì dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Khi thay ba đường phân giác thành ba đường trung tuyến, ta có bài toán sau:

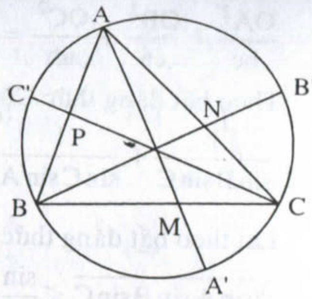
Cho tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến m_a, m_b, m_c. Gọi M_a, M_b, M_c là độ dài của ba đường trung tuyến ấy kéo dài cho đến khi gặp đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh: $\dfrac{M_a}{m_a} + \dfrac{M_b}{m_b} + \dfrac{M_c}{m_c} \ge 4$

Giải

Gọi các trung tuyến là AM, BN, CP và giả sử AM, BN, CP kéo dài tương ứng cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại A′, B′, C′. Khi đó ta có:

$AA' = M_a$, $BB' = M_b$, $CC' = M_c$

Đặt $t_a = M_a - m_a$; $t_b = M_b - m_b$; $t_c = M_c - m_c$.



Khi đó $\dfrac{M_a}{m_a} + \dfrac{M_b}{m_b} + \dfrac{M_c}{m_c} \ge 4$

$$\Leftrightarrow \frac{m_a + t_a}{m_a} + \frac{m_b + t_b}{m_b} + \frac{m_c + t_c}{m_c} \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_a}{m_a} + \frac{t_b}{m_b} + \frac{t_c}{m_c} \ge 1. \qquad (8)$$

Ta có: MA.MA′ = MB.MC hay $t_a.m_a = \dfrac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{t_a}{m_a} = \frac{a^2}{4m_a^2} = \frac{a^2}{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Tương tự $\dfrac{t_b}{m_b} = \dfrac{b^2}{2a^2 + 2c^2 - b^2}$; $\dfrac{t_c}{m_c} = \dfrac{c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Vì thế (8) ⇔ $\dfrac{a^2}{2b^2 + 2c^2 - a^2} + \dfrac{b^2}{2a^2 + 2c^2 - b^2} + \dfrac{c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \ge 1$ (9)

Đặt $\begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = X > 0 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = Y > 0 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = Z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{2(Y+Z) - X}{3} \\ b^2 = \dfrac{2(X+Z) - Y}{3} \\ c^2 = \dfrac{2(X+Y) - Z}{3}. \end{cases}$

Vì thế (9) ⇔ $\dfrac{Y+Z}{X} + \dfrac{Z+X}{Y} + \dfrac{X+Y}{Z} \ge 6$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}\right) + \left(\frac{X}{Z} + \frac{Z}{X}\right) + \left(\frac{Y}{Z} + \frac{Z}{Y}\right) \ge 6. \qquad (10)$$

Do X > 0, Y > 0, Z > 0, nên theo bất đẳng thức Cô si thì (10) đúng, vậy (9) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra dễ thấy ⇔ X = Y = Z

⇔ a = b = c

⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Chứng minh

$$\frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ca} + \frac{OC^2}{ab} \ge 1.$$

Giải

Theo định lí hàm số sin, ta có:

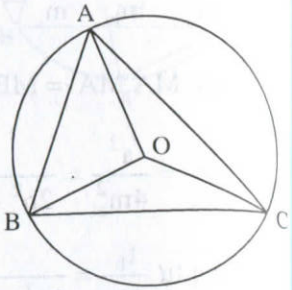
$$\frac{OA^2}{bc}+\frac{OB^2}{ca}+\frac{OC^2}{ab}=\frac{R^2}{4R^2}\left(\frac{1}{\sin B\sin C}+\frac{1}{\sin C\sin A}+\frac{1}{\sin A\sin B}\right). \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\frac{1}{\sin B\sin C}+\frac{1}{\sin C\sin A}+\frac{1}{\sin A\sin B}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}} \quad (2)$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}\leq\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \quad (3)$$



Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản thì

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

Từ (1) (2) (3) (4) suy ra $\frac{OA^2}{bc}+\frac{OB^2}{ca}+\frac{OC^2}{ab}\geq 1$

Đó là đpcm. Dễ thấy dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Nếu thay O bằng tâm đường tròn nội tiếp I, thì ta có:

$$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}\geq 1. \quad (5)$$

Thật vậy theo các bài trên thì $IA=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow\frac{IA^2}{bc}=\frac{16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{16R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

Tương tự có: $\frac{IB^2}{ca}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$; $\frac{IC^2}{ab}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$.

Từ đó suy ra (5) đúng.

2. Nếu thay O bằng trực tâm H, thì ta có:

$$\frac{HA^2}{bc}+\frac{HB^2}{ca}+\frac{HC^2}{ab}\geq 1 \quad (6)$$

Chứng minh (6) tương tự như chứng minh ở trên (xin dành cho bạn đọc tự thử lại).

Bài 6. Cho M là điểm nằm trong tam giác ABC. Kẻ MA_1, MB_1, MC_1 tương ứng vuông góc BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{MA^2}{(MB_1+MC_1)^2}+\frac{MB^2}{(MC_1+MA_1)^2}+\frac{MC^2}{(MA_1+MB_1)^2}\geq 3.$$

Giải

1. Nếu A_1, B_1, C_1 đều nằm trong tam giác ABC. Khi đó ta có:

$$\frac{MB_1+MC_1}{MA}=\frac{MB_1}{MA}+\frac{MC_1}{MA}=\sin MAB_1+\sin MAC_1. \quad (1)$$

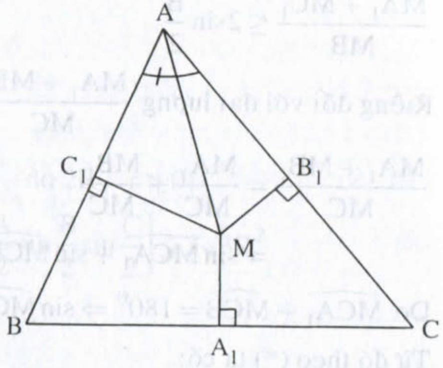
Hiển nhiên ta có (xem bài 2 § chương 4)

$$\frac{\sin\widehat{MAB_1}+\sin\widehat{MAC_1}}{2}\leq\sin\frac{\widehat{MAB_1}+\widehat{MAC_1}}{2}=\sin\frac{A}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra

$$\frac{MB_1+MC_1}{MA}\leq 2\sin\frac{A}{2}\text{, hay}$$

$$\frac{MA}{MB_1+MC_1}\geq\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}. \quad (1)$$



Dấu bằng trong (1) xảy ra khi AM là phân giác của góc A.

Tương tự ta có:

$$\frac{MB}{MC_1+MA_1}\geq\frac{1}{2\sin\frac{B}{2}}, \quad (2)$$

$$\frac{MC}{MA_1+MB_1}\geq\frac{1}{2\sin\frac{C}{2}}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2), (3) tương ứng xảy ra ⇔ BM, CM lần lượt là các phân giác của các góc B, C.

Từ (1) (2) (3) suy ra:

$$\frac{MA^2}{(MB_1+MC_1)^2}+\frac{MB^2}{(MC_1+MA_1)^2}+\frac{MC^2}{(MA_1+MB_1)^2}\geq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra ⇔ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

⇔ M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}. \quad (5)$$

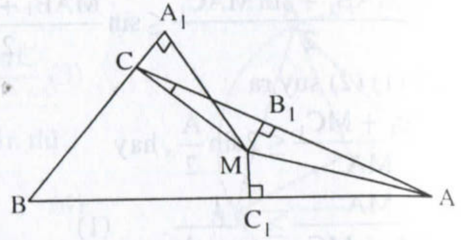
Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản thì $\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ (6)

Từ (4) (5) (6) suy ra đpcm trong trường hợp này.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều và M là tâm của tam giác ấy.

2. Nếu A_1, B_1, C_1 có điểm nằm ngoài tam giác ABC (chẳng hạn A_1 nằm ngoài tam giác ABC)

Khi đó ta có các đánh giá sau:



$$\frac{MB_1 + MC_1}{MA} \le 2\sin\frac{A}{2},$$

$$\frac{MA_1 + MC_1}{MB} \le 2\sin\frac{B}{2}$$

Riêng đối với đại lượng $\frac{MA_1 + MB_1}{MC}$ ta có:

$$\frac{MA_1 + MB_1}{MC} = \frac{MA_1}{MC} + \frac{MB_1}{MC}$$

$$= \sin\widehat{MCA_1} + \sin\widehat{MCB_1}. \qquad (*)$$

Do $\widehat{MCA_1} + \widehat{MCB} = 180^0 \Rightarrow \sin\widehat{MCA_1} = \sin\widehat{MCB}$.

Từ đó theo (*) ta có:

$$\frac{MA_1 + MB_1}{MC} = \sin\widehat{MCB} + \sin\widehat{MCB_1} \le 2\sin\frac{\widehat{MCB} + \widehat{MCB_1}}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.$$

Nghĩa là ta vẫn quy về đoạn sau của trường hợp 1 ⇒ đpcm.

(Tuy nhiên trong trường hợp này dấu bằng không xảy ra)

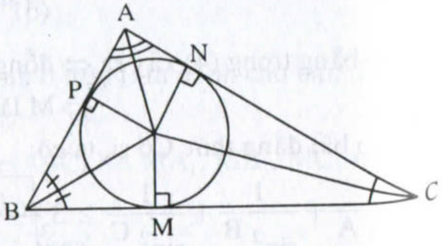
Bài toán được giải hoàn toàn.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với ba cạnh BC, AC, AB tương ứng tại M, N, P. Chứng minh:

$$BA.AP^2 + CA.BM^2 + AB.CN^2 \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2(2R - r).$$

Giải

Ta có:



$$AN = AP = p - a = \frac{b + c - a}{2}$$

$$BM = BP = p - b = \frac{a + c - b}{2},$$

$$CM = CN = p - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

Vì thế bất đẳng thức cần chứng minh có dạng tương đương sau:

$$4a(p - a)^2 + 4b(p - b)^2 + 4c(p - c)^2 \le 6\sqrt{3}\,R^2(2R - r)$$

$$\Leftrightarrow a(b + c - a)^2 + b(a + c - b)^2 + c(a + b - c)^2 \le 6\sqrt{3}\,R^2(2R - r)$$

$$\Leftrightarrow 4abc - (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \le 6\sqrt{3}\,R^2(2R - r). \qquad (1)$$

Áp dụng các công thức:

$$S = pr;\ S = \frac{abc}{4R};\ \ \frac{S^2}{p} = (p - a)(p - b)(p - c)$$

$$= \frac{(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{8}.$$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 16RS - \frac{8S^2}{p} \le 6\sqrt{3}R^2(2R - r)$$

$$\Leftrightarrow 8S(2R - r) \le 6\sqrt{3}\,R^2(2R - r)$$

$$\Leftrightarrow 4pr \le 3\sqrt{3}\,R^2 \qquad \text{(do } 2R - r > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \le 3\sqrt{3}R^2$$

$$\Leftrightarrow 8\sin A\sin B\sin C \le 3\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sin A\sin B\sin C \le \left(\frac{\sin A\sin B\sin C}{3}\right)^3. \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad (4)$$

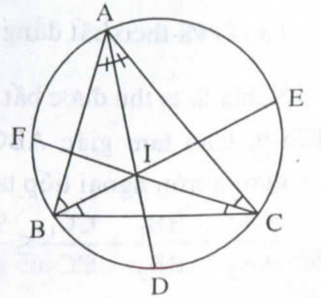
Thay (3) (4) vào (2) ta thấy (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 8. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D, E, F tương ứng.

Chứng minh: $\frac{ID}{IA} + \frac{IE}{IB} + \frac{IF}{IC} \ge 3$.

Giải



Lập luận như các bài trên, ta có:

$$ID = 2R\sin\frac{A}{2};\ IA = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Tương tự có: $\dfrac{IE}{IB}=\dfrac{\sin\dfrac{B}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}};\ \dfrac{IF}{IC}=\dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}$.

Vậy theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\frac{ID}{IA}+\frac{IE}{IB}+\frac{IF}{IC}\ge 3\sqrt[3]{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}. \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, thì

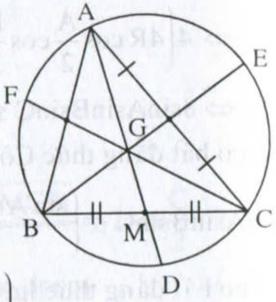
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Nếu thay các đường phân giác trong bằng các đường trung tuyến, tức là thay I bằng trọng tâm G của tam giác ABC, khi đó ta thấy như sau:

Theo các bài trên, ta có:

$$GD=\frac{a^2+b^2+c^2}{6m_a}.$$



Tương tự, có:

$$GE=\frac{a^2+b^2+c^2}{6m_b};\ GF=\frac{a^2+b^2+c^2}{6m_c}.$$

Như vậy ta có:

$$\frac{GD}{GA}+\frac{GE}{GB}+\frac{GF}{GC}=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}\right)$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{2b^2+2c^2-a^2}+\frac{1}{2a^2+2c^2-b^2}+\frac{1}{2a^2+2b^2-c^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[(2b^2+2c^2-a^2)+(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{2b^2+2c^2-a^2}+\frac{1}{2a^2+2c^2-b^2}+\frac{1}{2a^2+2b^2-c^2}\right] \qquad (2)$$

Từ (2) và theo bất đẳng thức Côsi suy ra: $\dfrac{GD}{GA}+\dfrac{GE}{GB}+\dfrac{GF}{GC}\ge 3$.

Nghĩa là ta thu được bất đẳng thức tương tự, khi thay phân giác bởi trung tuyến.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Ba đường phân giác AA_1, BB_1, CC_1 kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh:

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\le\frac{9}{4}.$$

Giải

Giải như bài 4, ta có: $\dfrac{AA_1}{AA_2}=\dfrac{l_a'}{bc}=\dfrac{4b^2c^2\cos^2\dfrac{A}{2}}{(b+c)^2bc}=\dfrac{4bc}{(b+c)^2}\dfrac{1+\cos A}{2}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, thì $\dfrac{4bc}{(b+c)^2}\le 1$.

Từ đó suy ra $\dfrac{AA_1}{AA_2}\le\dfrac{1+\cos A}{2}$. (1)

Lập luận tương tự, có: $\dfrac{BB_1}{BB_2}\le\dfrac{1+\cos B}{2};\ \dfrac{CC_1}{CC_2}\le\dfrac{1+\cos C}{2}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra:

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\le\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C). \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác, thì

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}. \qquad (4)$$

Từ (3) (4) suy ra: $\dfrac{AA_1}{AA_2}+\dfrac{BB_1}{BB_2}+\dfrac{CC_1}{CC_2}\le\dfrac{9}{4}$.

Đó là đpcm. Dễ thấy dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

Theo bài 4, ta có: $\dfrac{AA_2}{AA_1}+\dfrac{BB_2}{BB_1}+\dfrac{CC_2}{CC_1}\le 4$. (5)

Ta có: $\left(\dfrac{AA_2}{AA_1}+\dfrac{BB_2}{BB_1}+\dfrac{CC_2}{CC_1}\right)\left(\dfrac{AA_1}{AA_2}+\dfrac{BB_1}{BB_2}+\dfrac{CC_1}{CC_2}\right)\ge 9$. (6)

(theo bất đẳng thức Cô si)

Tuy nhiên từ (5), (6) không thể suy ra bất đẳng thức của chúng ta.

Bài 10. Cho tam giác ABC không có góc tù. Ba đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng: $S_{A_1B_1C_1}\le S_{ABC}$.

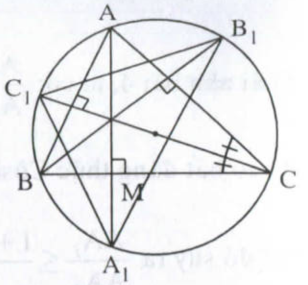
Giải

Xét hai trường hợp:

1. Nếu ABC là tam giác nhọn. Khi đó ta có:

$S_{A_1B_1C_1}=2R^2\sin A_1\sin B_1\sin C_1$. (1)

Ta có: AA_1, BB_1, CC_1 là ba đường phân giác trong của tam giác $A_1B_1C_1$ (dễ dàng)



$\Rightarrow A_1 = 2\widehat{C_1A_1A} = 2\widehat{C_1CA}$

$= 2(90^0 - A) = 180^0 - 2A$

$\Rightarrow \sin A_1 = \sin 2A.$

Tương tự $\sin B_1 = \sin 2B$; $\sin C_1 = \sin 2C$.

Từ đó: $S_{A_1B_1C_1} = 2R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C$.

Mặt khác $S_{ABC} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

Từ đó $S_{A_1B_1C_1} \le S_{ABC}$

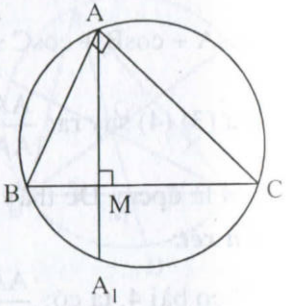
$\Leftrightarrow \sin 2A\sin 2B\sin 2C \le \sin A\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow 8\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C \le \sin A\sin B\sin C$ (2)

Do $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, $\sin C > 0$, nên

(2) $\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ (3)

Vì (3) đúng (theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác) nên suy ra $S_{A_1B_1C_1} \le S_{ABC}$



2. Nếu ABC là tam giác vuông (chẳng hạn tại A)

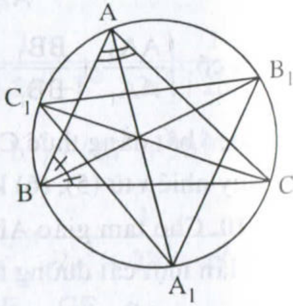
Khi đó $B_1 \equiv C_1 \equiv A \Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = 0$

Lúc này hiển nhiên ta có: $S_{A_1B_1C_1} < S_{ABC}$.

Vậy khi ABC không phải là tam giác tù,

ta luôn có: $S_{A_1B_1C_1} \le S_{ABC}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.



Nhận xét: Nếu thay đường cao bằng đường phân giác trong. Khi đó ta có bất đẳng thức với dấu ngược lại.

$S_{ABC} \le S_{A_1B_1C_1}$.

Chứng minh tương tự như trên và ta có:

$S_{ABC} \le S_{A_1B_1C_1} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

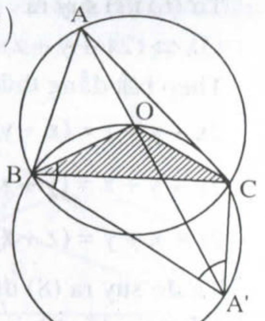
Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản suy ra đpcm.

Bài 11. Cho tam giác ABC không vuông nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Đường thẳng AO, BO, CO tương ứng cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, COA, AOB tại A′, B′, C′. Chứng minh:

$OA'.OB'.OC' \ge 8R^3$.

Giải

Gọi R, là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCA′, thì theo định lý hàm số sin, ta có:



$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\widehat{BA'C}} = \frac{BC}{2\sin\widehat{BOC}} \quad \left(\text{do } \widehat{BA'C} + \widehat{BOC} = 180^0\right)$$

$$= \frac{BC}{2\sin 2A} = \frac{2R\sin A}{2\sin 2A} = \frac{R}{2\cos A}. \quad (1)$$

Ta có: $\widehat{A'OC} = 180^0 - \widehat{AOC} = 180^0 - 2B$

$\widehat{A'BO} = \widehat{A'OC} + \widehat{OBC} \left(\text{do } \widehat{A'OC} = \widehat{A'BC}\right)$

$= 180^0 - 2B + 90^0 - A$

(do $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ và $OB = OC$

và $\widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^0 - \widehat{BOC} = 180^0 - 2A \Rightarrow \widehat{OBC} = 90^0 - A$)

$\Rightarrow \widehat{A'BO} = A + B + C - 2B + 90^0 - A = 90^0 + c - B.$

Do vậy $OA' = 2R_1\sin\widehat{A'BO} = 2\frac{R}{2\cos A}\sin\left[90^0 + (C - B)\right]$

$$= \frac{R\cos(B - C)}{\cos A}. \quad (2)$$

Lí luận tương tự có: $OB' = \frac{R\cos(C - A)}{\cos B}$, (3)

$$OC' = \frac{R\cos(A - B)}{\cos C}. \quad (4)$$

Từ (2) (3) (4) suy ra

$OA'.OB'.OC' \ge 8R^3$

$\Leftrightarrow \cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A) \ge 8\cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow \cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A) \ge -8\cos(B + C)\cos(C + A)\cos(A + B).$

Vì thế kết hợp với $\sin^2A\sin^2B\sin^2C > 0$ suy ra

$OA'.OB'.OC' \ge 8R^3$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A)}{\sin A\sin B\sin B\sin C\sin C\sin A} \ge -8\frac{\cos(A + B)\cos(B + C)\cos(C + A)}{\sin A\sin B\sin B\sin C\sin C\sin A}$$

$\Leftrightarrow (1 + \tan A\tan B)(1 + \tan B\tan C)(1 + \tan C\tan A)$

$\ge -8(1 - \tan A\tan B)(1 - \tan B\tan C)(1 - \tan C\tan A).$ (5)

Đặt $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$ và chú ý rằng trong mọi tam giác không vuông, ta có:

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow x + y + z = xya$ (6)

Khi đó

(3) $\Leftrightarrow (1 + xy)(1 + yz)(1 + zx) \ge 8(xy - 1)(yz - 1)(zx - 1)$

$\Leftrightarrow (z + xyz)(x + xyz)(y + xyz) \ge 8(xyz - z)(xyz - x)(xyz - y)$ (7)

Từ (6) (7) suy ra

$$(3) \Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) \geq 8(x+y)(y+z)(z+x). \quad (8)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, thì

$$2x+y+z=(x+y)(x+z) \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)}$$

$$2y+y+x=(y+x)(y+z) \geq 2\sqrt{(x+y)(y+z)}$$

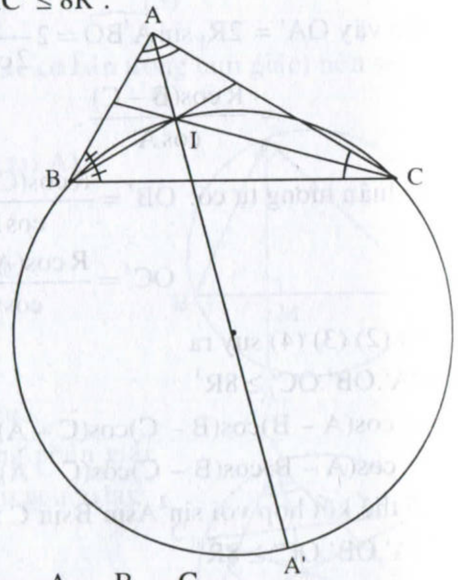
$$2z+x+y=(z+x)(z+y) \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)}.$$

Từ đó suy ra (8) đúng ⇒ đpcm.

Dễ thấy dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Giả sử AI, BI, CI tương ứng cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, IAC, IAB tại A′, B′, C′. Chứng minh: $IA'.IB'.IC' \leq 8R^3$.

Giải



Gọi A′ là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC

⇒ BA′ và CA′ tương ứng là các đường phân giác ngoài của góc B, C

⇒ IB ⊥ A′B và IC ⊥ A′C

⇒ đường tròn đường kính IA′ chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC. Vì thế trong tam giác vuông IBA′, ta có:

$$IA' = \frac{IB}{\cos\widehat{BIA}} = \frac{IB}{\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{IB}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\text{Do } IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \Rightarrow IA' = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}.$$

Tương tự có $IB' = 4R\sin\frac{B}{2}$; $IC' = 4R\sin\frac{C}{2}$.

Vì thế $IA'.IB'.IC' \leq 8R^3 \Leftrightarrow 64R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq 8$

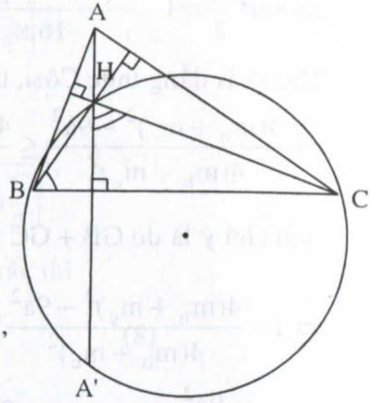
$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 13. Cho ABC là tam giác nhọn và H là trực tâm. Giả sử HA, HB, HC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HAC, HAB tại A′, B′, C′. Chứng minh $HA'.HB'.HC' \geq 8R^2\cos A\cos B\cos C$.

Giải



Ta có: $\widehat{CHA'} = \widehat{ABC} = B$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Mặt khác như đã biết đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC có bán kính cũng chính là R (bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác HBA′, ta có:

$$HA' = 2R\sin\widehat{HBA'}$$
$$= 2R\sin\left(\widehat{HBC} + \widehat{A'BC}\right)$$
$$= 2R\sin\left(90^0 - C + B\right) = 2R\cos(B-C).$$

Lập luận tương tự có: $HB' = 2R\cos(C-A)$,

$HC' = 2R\cos(A-B)$.

Từ đó $HA'.HB'.HC' = 8R^3\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)$. (1)

Mặt khác theo chứng minh trong bài 11, ta có:

$$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) \geq \cos A\cos B\cos C. \quad (2)$$

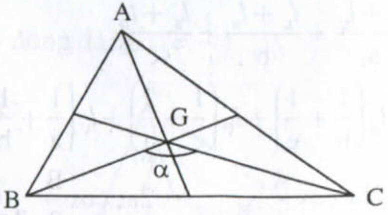
Từ (1) (2) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 14. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm tam giác. Đặt $\widehat{BGC} = \alpha$, $\widehat{CGA} = \beta$, $\widehat{AGB} = \gamma$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{m_a+m_b} + \frac{b}{m_b+m_c} + \frac{c}{m_c+m_a} \geq \frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right).$$

Giải

Ta có $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$, vì thế áp dụng định lý hàm số cosin, ta có:



$$\cos\alpha = \frac{GB^2 + GC^2 - BC^2}{2GB.GC}$$
$$= \frac{\frac{9}{4}\left(m_b^2 + m_c^2\right) - a^2}{\frac{8}{9}m_b m_c}$$

$$\Rightarrow 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{4\left(m_b^2+m_c^2\right)-9a^2}{8m_bm_c}=\frac{4(m_b+m_c)^2-9a^2-8m_bm_c}{8m_bm_c}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\frac{4(m_b+m_c)^2-9a^2}{16m_bm_c}.\quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì $4(m_b + m_c)^2 \geq 16m_bm_c$

$$\Rightarrow \frac{4(m_b+m_c)^2-9a^2}{4(m_b+m_c)^2}\leq\frac{4(m_b+m_c)^2-9a^2}{16m_bm_c}$$

(với chú ý là do GB + GC > BC $\Rightarrow \frac{2}{3}(m_b + m_c) > a \Rightarrow 4(m_b + m_c)^2 - 9a^2 > 0$)

$$\Rightarrow 1-\frac{4(m_b+m_c)^2-9a^2}{4(m_b+m_c)^2}\geq 1-\frac{4(m_b+m_c)^2-9a^2}{16m_bm_c}$$

$$\Rightarrow \frac{9a^2}{4(m_b+m_c)^2}\geq 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\leq\frac{a}{m_b+m_c}.\quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow m_b = m_c$

Lập luận tương tự, ta có: $\frac{2}{3}\sin\frac{\beta}{2}\leq\frac{b}{m_c+m_a}$, (3)

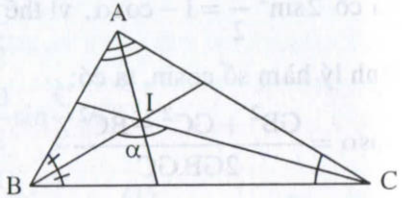
$$\frac{2}{3}\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{c}{m_a+m_b}\quad (4)$$

Dấu bằng trong (3), (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Ta có bài toán tương tự sau: Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đặt $\widehat{BIC}=\alpha$, $\widehat{CIA}=\beta$, $\widehat{AIB}=\gamma$. Chứng minh:

$$\frac{b}{l_b+l_c}+\frac{c}{l_c+l_a}+\frac{a}{l_a+l_b}\geq\frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right).$$

Giải



Ta có:

$$\frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_c+l_a}{b}+\frac{l_a+l_b}{c}$$

$$=l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+l_b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.\frac{b+c}{bc}+\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}.\frac{a+c}{ac}+\frac{2ab\cos\frac{A}{2}}{a+b}.\frac{a+b}{ab}$$

$$=2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right).\quad (5)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\left(\frac{a}{l_b+l_c}+\frac{b}{l_c+l_a}+\frac{c}{l_a+l_b}\right)\left(\frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_c+l_a}{b}+\frac{l_a+l_b}{c}\right)\geq 9.\quad (6)$$

Từ (5) (6) suy ra

$$\frac{a}{l_b+l_c}+\frac{b}{l_c+l_a}+\frac{c}{l_a+l_b}\geq\frac{9}{2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}.\quad (7)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$0<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.\quad (8)$$

Từ (7) (8) có: $\frac{a}{l_b+l_c}+\frac{b}{l_c+l_a}+\frac{c}{l_a+l_b}\geq\sqrt{3}$. (9)

Do $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\pi$.

Dĩ nhiên $\frac{\alpha}{2}>0, \frac{\beta}{2}>0, \frac{\gamma}{2}>0$, nên có thể coi $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ là ba góc của một tam giác nào đó. Vì thế lại theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản ta có:

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\leq\sqrt{3}.\quad (10)$$

Từ (9) (10) suy ra đpcm

Bài 15. Cho tam giác ABC. Gọi I là tam đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, IAC, IAB. Chứng minh: $S_{O_1O_2O_3} \geq S$.

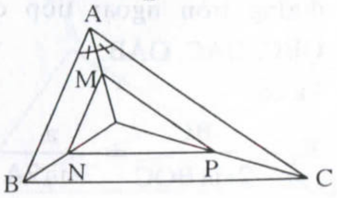
Giải

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của IA, IB, IC

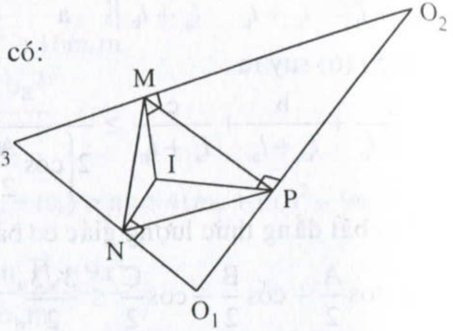
$\Rightarrow S_{MNP} = \frac{1}{4}S$ (do $\Delta MNP \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$)

Tâm O_1 là giao của hai đường trung trực các cạnh IB, IC.

Tâm O_2 là giao của hai đường trung trực các cạnh IC, IA.



Tâm O_3 là giao của hai đường trung trực các cạnh IA, IB
Khi đó dễ thấy O_1, O_2, O_3 tương ứng cũng là tâm các đường tròn bàng tiếp tiếp các góc M, N, P của ΔMNP.
Gọi R′ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP, thì
$S_{MNP} = 2(R')^2\sin M\sin N\sin P$
Theo phần đẳng thức trong tam giác ta có:



$$O_1O_2 = 4R'\cos\frac{N}{2};$$

$$O_1O_3 = 4R'\cos\frac{P}{2}$$

Rõ ràng ta có:

$$\widehat{O_3O_1O_2} = 180^0 - \widehat{NIP} = \frac{N+P}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{O_3O_1O_2} = \sin\frac{N+P}{2} = \cos\frac{M}{2}.$$

Vì thế $S_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}O_1O_2.O_1O_3.\sin\widehat{O_3O_1O_2} = 8(R')^2\cos\frac{M}{2}\cos\frac{N}{2}\cos\frac{P}{2}$

Ta có: $S_{O_1O_2O_3} \geq S$

$$\Leftrightarrow 8(R')^2\cos\frac{M}{2}\cos\frac{N}{2}\cos\frac{P}{2} \geq 4S_{MNP}$$

$$\Leftrightarrow 8(R')^2\cos\frac{M}{2}\cos\frac{N}{2}\cos\frac{P}{2} \geq 4.2(R')^2\sin M\sin N\sin P$$

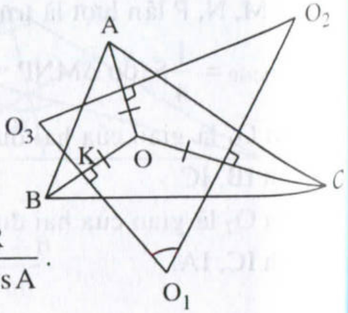
$$\Leftrightarrow \sin\frac{M}{2}\sin\frac{N}{2}\sin\frac{P}{2} \leq \frac{1}{8}. \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì (1) đúng ⇒ đpcm.
Dấu bằng xảy ra ⇔ MNP là tam giác đều ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 16. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OAC, OAB. Chứng minh: $S_{O_1O_2O_3} \geq S$

Giải

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OAC, OAB.



Ta có:

$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\widehat{BOC}} = \frac{a}{2\sin 2A} = \frac{2R\sin A}{4\sin A\cos A} = \frac{R}{2\cos A}.$$

Lập luận tương tự có: $R_2 = \frac{R}{2\cos B}$; $R_3 = \frac{R}{2\cos C}$

$$\text{Ta có: } O_1O_3 = O_3K + O_1K = \sqrt{R_3^2 - \frac{R^2}{4}} + \sqrt{R_1^2 - \frac{R^2}{4}}$$

$$= \frac{R}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 C} - 1} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A} - 1}$$

$$= \frac{R}{2}(\tan C + \tan A).$$

Tương tự có $O_2O_1 = \frac{R}{2}(\tan B + \tan A)$. Vì thế

$$S_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}O_1O_3.O_1O_2\sin\widehat{O_3O_1O_2}$$

$$= \frac{R^2}{8}\frac{\sin(C+A)}{\cos C.\cos A}.\frac{\sin(B+A)}{\cos B\cos A}\sin\left(180^0 - \widehat{BOC}\right)$$

$$= \frac{R^2}{8}\frac{\sin B\sin C\sin 2A}{\cos B\cos C\cos^2 A} = \frac{R^2}{4}\frac{\sin B\sin C\sin A}{\cos B\cos C\cos A}$$

Vì thế $S_{O_1O_2O_3} \geq S$

$$\Leftrightarrow \frac{R^2}{4}\frac{\sin B\sin C\sin A}{\cos B\cos C\cos A} \geq 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8} \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì (1) đúng ⇒ đpcm.
Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

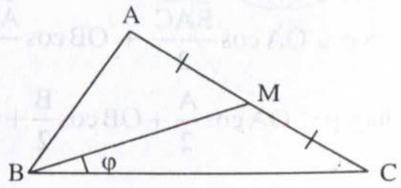
Nhận xét:

Nếu thay O bằng trọng tâm G của tam giác ABC, thì nếu gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GAC, GAB thì ta vẫn có bất đẳng thức $S_{O_1O_2O_3} \geq S$.

Chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Bài 17. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của AC. Đặt $\widehat{CBM} = \varphi$.
Chứng minh: $\cot A \geq \frac{2\sqrt{2} - 3\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

Giải



Ta có:

$$\cot A \geq \frac{2\sqrt{2} - 3\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \cot A + 3\cot\varphi \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Theo đẳng thức trong tam giác, ta có:

$$\cot A + 3\cot\varphi = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + 3\frac{BM^2+MC^2-MC^2}{4S}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + 3\frac{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}+a^2-\frac{b^2}{4}}{2S}$$

$$= \frac{4a^2+2c^2-b^2}{2S} = \frac{(2a^2+2c^2-b^2)+2a^2}{2S}$$

$$= \frac{4BM^2+2a^2}{2S} = \frac{2BM^2+a^2}{S} \quad (2)$$

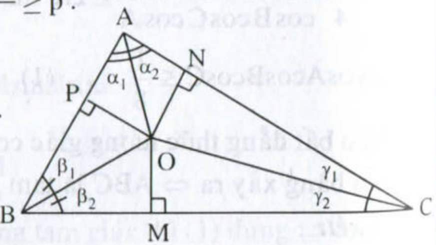
Theo bất đẳng thức Côsi, ta thấy $2BM^2 + a^2 \geq 2\sqrt{2}\,BM.a.$ (3)

Từ (2) (3) suy ra $\cot A + 3\cot\varphi \geq \frac{2\sqrt{2}BM.a}{BM.a\sin\varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi}$.

Vậy (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 2BM^2 = a^2 \Leftrightarrow a = m_a\sqrt{2}$.

Bài 18. O là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Chứng minh:

$$OA\cos\frac{\widehat{BAC}}{2} + OB\cos\frac{\widehat{ABC}}{2} + OC\cos\frac{\widehat{ACB}}{2} \geq p.$$



Giải

Kí hiệu $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ (xem hình vẽ).

Kẻ $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, $OP \perp AB$.

Ta có:

$$p = \frac{1}{2}(BM + MC + CN + NA + AP + PB)$$

$$= \frac{1}{2}(OB\cos\beta_2 + OC\cos\gamma_2 + OC\cos\gamma_1 + OA\cos\alpha_2 + OA\cos\alpha_1 + OB\cos\beta_1)$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2}OA(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) + \frac{1}{2}OB(\cos\beta_1 + \cos\beta_2) + \frac{1}{2}OC(\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2)$$

$$\Rightarrow p = OA\cos\frac{\widehat{BAC}}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\widehat{ABC}}{2}\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2} + \frac{1}{2}\cos\widehat{BCA}\cos\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}$$

$$\Rightarrow p \leq OA\cos\frac{\widehat{BAC}}{2} + OB\cos\frac{\widehat{ABC}}{2} + OC\cos\frac{\widehat{ACB}}{2}$$

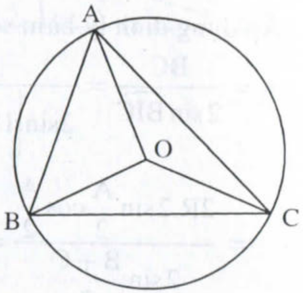
hay $p \leq OA\cos\frac{A}{2} + OB\cos\frac{B}{2} + OC\cos\frac{C}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2;\ \beta_1 = \beta_2;\ \gamma_1 = \gamma_2$

$\Leftrightarrow$ O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Bài 19. Cho tam giác nhọn ABC và gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OAC, OAB. Chứng minh: $r_1 + r_2 + r_3 \geq 3R$.

Giải



Áp dụng định lý hàm số sin trong các ΔABC, BOC ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$r_1 = \frac{a}{2\sin\widehat{BOC}} = \frac{a}{2\sin 2A}$$

Tương tự có: $r_2 = \frac{b}{2\sin 2B}$; $r_3 = \frac{c}{2\sin 2C}$

Khi đó $r_1 + r_2 + r_3 \geq 3R$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2\sin 2A} + \frac{b}{2\sin 2B} + \frac{c}{2\sin 2C} \geq 3R$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R\sin A}{4\sin A\cos A} + \frac{2R\sin B}{4\sin B\cos B} + \frac{2R\sin C}{4\sin C\cos C} \geq 3R$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq 6 \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, thì

$$\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C}\right)(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 9$$

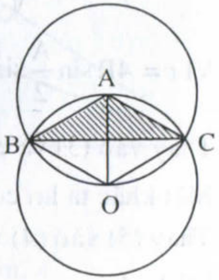
Do $0 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$, nên từ (2) suy ra (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Chú ý:

1. Nếu ABC là tam giác có góc tù, thì kết luận của bài toán chưa chắc đúng.

Thật vậy xét tam giác ABC có:



$A = 120^0$; $B = C = 30^0$.

Dễ thấy lúc này $r_1 = R$

Các tam giác OAB, OAC là các tam giác đều có cạnh bằng R, nên

$$r_2 = r_3 = \frac{2}{3}\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} < R$$

Vậy $r_1 + r_2 + r_3 = R + R\sqrt{3} < 3R$

2. Từ $R \ge 2r$, nên hiển nhiên ta có:

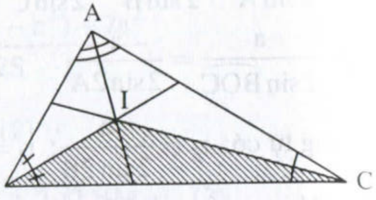
$r_1 + r_2 + r_3 \ge 6r$

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 20. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, IAC, IAB. Chứng minh: $6r \le r_1 + r_2 + r_3 \le 3R$.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin trong ΔIBC, ta có:



$$r_1 = \frac{BC}{2\sin\widehat{BIC}} = \frac{a}{2\sin\left[180^0 - \frac{B+C}{2}\right]}$$

$$= \frac{2R.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}} = 2R\sin\frac{A}{2}$$

Tương tự có: $r_2 = 2R\sin\frac{B}{2}$; $r_3 2R\sin\frac{C}{2}$

Vậy $r_1 + r_2 + r_3 \le 3R$ (1)

$\Leftrightarrow 2R\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) \le 3R$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$ (2)

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì (2) đúng ⇒ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$r_1 + r_2 + r_3 = 2R\sin\frac{A}{2} + 2R\sin\frac{B}{2} + 2R\sin\frac{C}{2}$

$\ge 3\sqrt[3]{8R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$. (3)

Vì $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow 8R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2R^2r$.

Thay vào (3) và có $r_1 + r_2 + r_3 \ge 3\sqrt[3]{2R^2r}$ (4)

Mặt khác ta lại có: $R \ge 2r \Rightarrow 2R^2r \ge 8r^3$ (5)

Thay (5) vào (4) và có: $r_1 + r_2 + r_3 \ge 6R$

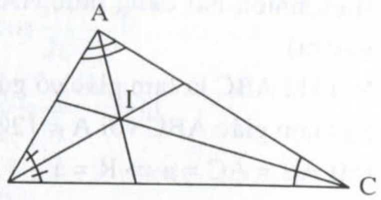
Đó là đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 21. Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp.

Chứng minh: $IA.IB.IC \le R^3$.

Giải



Như đã biết

$IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$, $IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$.

Do đó $IA.IB.IC \le R^3$

$\Leftrightarrow \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \le R^3$. (1)

Vì $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, nên

(1) $\Leftrightarrow 64\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2 \le 1$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$. (2)

Rõ ràng (2) đúng (theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác) ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

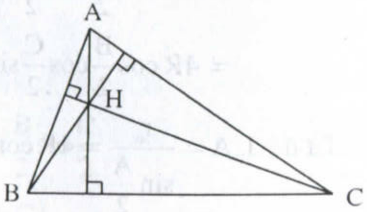
Bài 22. Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H.

Chứng minh: $HA.HB.HC \le R^3$.

Giải

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác HAB, ta có:

$$\frac{HA}{\sin\widehat{ABH}} = \frac{AB}{\sin\widehat{AHB}} \Rightarrow \frac{HA}{\cos A} = \frac{c}{\sin C} \text{ (do } \widehat{HAB} + C = 180^0\text{)}$$



$\Rightarrow HA = \frac{2R\sin C.\cos A}{\sin C} = 2R\cos A$.

Tương tự $HB = 2R\cos B$; $HC = 2R\cos C$.

Vậy $HA.HB.HC \le R^3$

$\Leftrightarrow 8R^3(\cos A\cos B\cos C) \le R^3$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$. (1)

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản thì (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Khi ABC là tam giác vuông (chẳng hạn vuông tại A). Khi đó

   $H \equiv A \Rightarrow HA = 0 \Rightarrow HA.HB.HC = 0.$

   Hiển nhiên bất đẳng thức $HA.HB.HC \le R^3$ là đúng (ở đây dấu bằng không xảy ra)

2. Xét khi ABC là tam giác có góc tù.

   Xét tam giác ABC với $A = 120^0$; $B = C = 30^0$

   Đặt $AB = AC = a \Rightarrow R = a$

   Ta có $HA = a$; $HB = HC = a\sqrt{3}$

   $\Rightarrow HA.HB.HC > 3a^3 > a^3 = R^3$

   $\Rightarrow HA.HB.HC > R^3$

   Vậy kết luận của bài toán trong trường hợp này chưa chắc đúng.

Bài 23. Cho tam giác ABC. Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác.

1. Chứng minh: $I_aA.I_bB.I_cC \le 27R^3$.
2. Chứng minh: $I_aA + I_bB + I_cC \le 9R$.

Giải

Nhận xét: Ta thấy rằng 2/ suy ra 1/

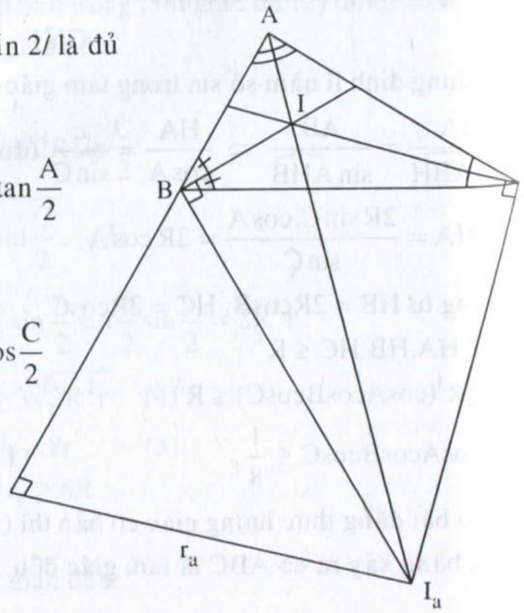
Thật vậy theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$I_aA + I_bB + I_cC \ge 3\sqrt[3]{I_aA.I_bB.I_cC}$.

Từ đó theo 2/ suy ra $9R \ge 3\sqrt[3]{I_aA.I_bB.I_cC} \Rightarrow I_aA.I_bB.I_cC \le 27R^3$

Vậy 2/ suy ra 1/

Vì thế ta chỉ cần chứng minh phần 2/ là đủ



Ta có: $r_a = p\tan\dfrac{A}{2}$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$= 4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

Từ đó $I_aA = \dfrac{r_a}{\sin\dfrac{A}{2}} = 4R\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

Tương tự:

$I_bB = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

$I_cC = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

Như vậy $I_aA + I_bB + I_cC \le 9R$

$$\Leftrightarrow 4R\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right) \le 9R$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} \le \frac{9}{4} \quad (1)$$

Dễ thấy

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} \le \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \quad (2)$$

Vì $\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2}$,

$\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$ (bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác),

nên từ (2) suy ra (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 24. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

1. $\dfrac{h_a}{l_a} \ge \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$ 2. $\dfrac{h_a}{l_a} + \dfrac{h_b}{l_b} + \dfrac{h_c}{l_c} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{2r}{R}}$.

Giải

1. Ta luôn có thể giả sử $B \ge C$ (nếu không thì chỉ việc tráo đổi vai trò giữa hai đỉnh B và C) và có hình vẽ bên.

Vẽ đường cao AH và phân giác AD (khi đó AD ở bên phải AH – xem hình vẽ)

Ta có: $\dfrac{h_a}{l_a} = \dfrac{AH}{AD} = \sin\widehat{ADH} = \sin\left(C + \dfrac{A}{2}\right)$.

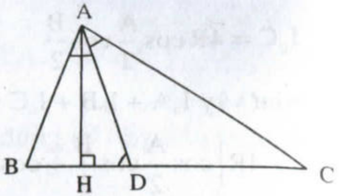
Từ đó $\dfrac{h_a}{l_a} \ge \sqrt{\dfrac{2r}{R}} \Leftrightarrow \sin^2\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \ge \dfrac{2r}{R}$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(C - \frac{B}{2}\right) \ge 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(C - \frac{B}{2}\right) \ge 4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(C - \frac{B}{2}\right) \ge 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 4\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{C-B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\right)^2 \geq 0. \qquad (1)$$



Vì (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \cos\frac{C-B}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C-B}{2}\sin\frac{C+B}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin C + \sin B = 2\sin A \Leftrightarrow b + c = 2a$$

$\Leftrightarrow$ b, a, c lập thành một cấp số cộng.

2. Theo trên ta có:

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} = \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} + \cos\frac{A-B}{2}.$$

Vậy $\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} + \cos\frac{A-B}{2} \geq 6\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}. \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} + \cos\frac{A-B}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh rằng trong mọi tam giác thì

$$\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \qquad (3)$$

Thật vậy

$$(3) \Leftrightarrow 8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geq 8\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}\right)\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\geq 8\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow (\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B) \geq \geq 8\sin A\sin B\sin C \qquad (4)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$\sin B + \sin C \geq 2\sqrt{\sin B\sin C}$,

$\sin C + \sin A \geq 2\sqrt{\sin C\sin A}$,

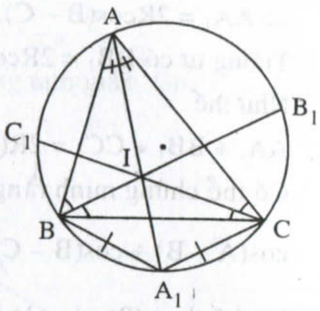
$\sin A + \sin B \geq 2\sqrt{\sin A\sin B}$.

Từ đó suy ra (4) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 25. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Đường phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng $AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + CA$.

Giải



Ta có: $AB + AC = c + b = 2R\sin C + 2R\sin B$

$$= 4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}. \qquad (1)$$

Theo định lý hàm số sin trong các tam giác ABA_1, ACA_1 ta có:

$$AA_1 = 2R\sin\widehat{ABA_1} = 2R\sin\left(B + \frac{A}{2}\right),$$

$$AA_1 = 2R\sin\widehat{ACA_1} = 2R\sin\left(C + \frac{A}{2}\right).$$

Từ đó suy ra $2AA_1 = 2R\left[\sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{A}{2}\right)\right]$

$$= 4R\sin\frac{B+C+A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 4R\cos\frac{B-C}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) đi đến $\quad 2AA_1 > AB + AC. \quad (2)$

Lập luận tương tự $\quad 2BB_1 > BA + BC, \quad (3)$

$\quad 2CC_1 > CA + CB. \quad (4)$

Cộng từng vế (2) (3) (4) suy ra đpcm.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh (2) bằng cách "phi lượng giác" như sau:

Theo định lí Ptoleme, ta có:

$$AA_1.BC = AB.A_1C + AC.A_1B$$
$$= A_1B(AB + AC) \qquad \text{(do } A_1B = A_1C\text{)}$$
$$\Rightarrow 2AA_1 = \frac{2A_1B(AB + AC)}{BC}.$$

Do $2A_1B = A_1B + A_1C > BC$ nên suy ra $2AA_1 > AB + AC$, vậy (2) đúng.

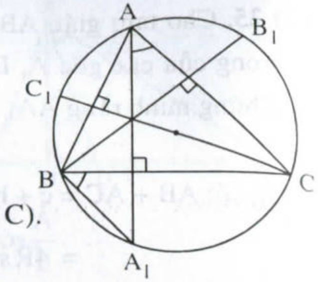
Bài 26. Cho ABC là tam giác nhọn. Các đường cao kẽ từ A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh:

$AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + CA$.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin trong ΔABA_1, ta có:

$AA_1 = 2R\sin\widehat{ABA_1}$



Vì $\widehat{ABA_1} = \widehat{ABC} + \widehat{CBA_1} = B + \widehat{CAA_1}$

$= B + 90^0 - C$

$\Rightarrow \sin ABA_1 = \sin(90^0 + B - C) = \cos(B - C)$

$\Rightarrow AA_1 = 2R\cos(B - C)$.

Tương tự có $BB_1 = 2R\cos(C - A)$; $CC_1 = 2R\cos(B - C)$.

Như thế

$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 2R(\cos(A - B) + \cos(C - A) + \cos(B - C))$ (1)

Có thể chứng minh rằng

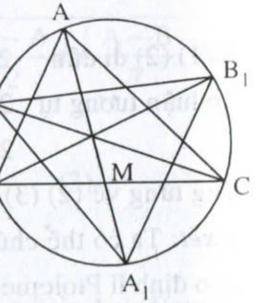
$\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) > 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (2)

Vì thế thay (2) vào (1) và có:

$AA_1 + BB_1 + CC_1 > 2p = AB + BC + CA \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét:

Ta có kết quả tương tự khi thay đường cao bằng các đường trung tuyến (ở đây đúng với mọi tam giác)



Ta có: $AM.MA_1 = BM.MC = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow MA_1 = \frac{a^2}{4m_a}$

$\Rightarrow AA_1 = m_a + \frac{a^2}{4m_a} = \frac{4m_a^2 + a^2}{4m_a} = \frac{b^2 + c^2}{2m_a}$

Tương tự có: $BB_1 = \frac{c^2 + a^2}{2m_b}$; $CC_1 = \frac{a^2 + b^2}{2m_c}$.

Rõ ràng trong mọi ΔABC, ta có:

$2m_a < b + c$; $2m_b < c + a$; $2m_c < a + b$.

Từ đó suy ra

$AA_1 + BB_1 + CC_1 > \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} + \frac{a^2 + b^2}{a + b}$

$\Rightarrow AA_1 + BB_1 + CC_1 > (b + c) - \frac{2bc}{b + c} + (c + a) - \frac{2ca}{c + a} + (a + b) - \frac{2ab}{a + b}$

$\Rightarrow AA_1 + BB_1 + CC_1$

$> a + b + c + \left(\frac{a + b}{2} - \frac{2ab}{a + b}\right) + \left(\frac{b + c}{2} - \frac{2bc}{b + c}\right) + \left(\frac{c + a}{2} - \frac{2ca}{c + a}\right).$ (3)

Hiển nhiên ta có: $\frac{a + b}{2} - \frac{2ab}{a + b} = \frac{(a - b)^2}{2(a + b)} \geq 0$

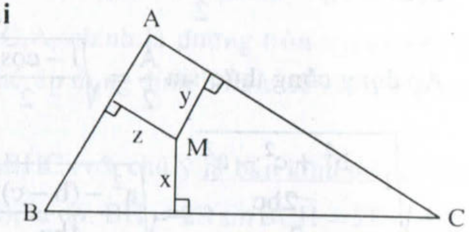
$\frac{b + c}{2} - \frac{2bc}{b + c} \geq 0$; $\frac{c + a}{2} - \frac{2ca}{a + c} \geq 0$, nên thay vào (3) có:

$\Rightarrow AA_1 + BB_1 + CC_1 > a + b + c \Rightarrow$ đpcm.

Bài 27. Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là các khoảng cách từ M xuống BC, AC, AB.

Chứng minh: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$.

Giải



Ta có: $S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S$

$\Rightarrow \frac{S_{MBC}}{S} + \frac{S_{MAC}}{S} + \frac{S_{MAB}}{S} = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$

$\Rightarrow h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c)\left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}\right)$. (1)

Từ (1) và theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$h_a + h_b + h_c \geq \left(\sqrt{h_a}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h_a}} + \sqrt{h_b}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{h_b}} + \sqrt{h_c}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{h_c}}\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{h_a} + \sqrt{h_b} + \sqrt{h_c} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{h_a}{x} = \frac{h_b}{y} = \frac{h_c}{z}$.

Trong mọi tam giác ABC, thì $h_a = b\sin C$, $h_b = c\sin A$, $h_c = a\sin B$, nên

$\sqrt{h_a + h_b + h_c} = \sqrt{b\sin C + c\sin A + a\sin B} = \sqrt{\frac{bc + ac + ab}{2R}}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$\sqrt{h_a + h_b + h_c} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$. (3)

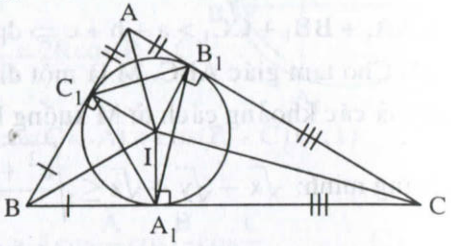
Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Từ (2) (3) có: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều và M là tâm của tam giác.

Bài 28. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Gọi p_1 là nửa chu vi tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh: $p_1 \le \frac{1}{2}p$.

Giải



Ta có: $AB_1 = AC_1 = p - a$;

$BC_1 = BA_1 = p - b$;

$CA_1 = CB_1 = p - c$.

Từ đó suy ra:

$B_1C_1 = 2(p-a)\sin\frac{A}{2}$. (1)

Áp dụng công thức $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) ta có $B_1C_1 = 2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$$= \sqrt{(b+c-a)^2\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}{4bc}} \le \frac{bc}{2\sqrt{bc}} = \frac{1}{2}\sqrt{bc}$$

$$\Rightarrow B_1C_1 \le \frac{b+c}{2}. \quad (3)$$

Tương tự có $C_1A_1 \le \frac{c+a}{2}$; $A_1B_1 \le \frac{a+b}{2}$ (4)

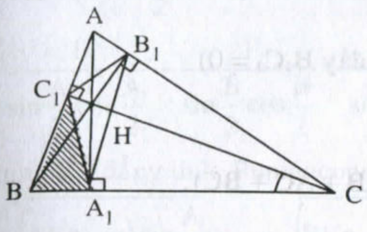
Cộng từng vế (2) (3) (4) suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

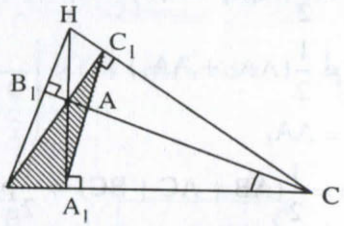
Bài 29. Cho tam giác ABC có trực tâm là H. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ A, B, C và p_1 là nửa chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$.

Chứng minh rằng: $p_1 \le \frac{1}{2}p$.

Giải



Hình 1



Hình 2

1. Xét trường hợp ΔABC có 3 góc nhọn (hình 1) và có một góc tù (chẳng hạn $A > 90^0$ – hình 2)

Chú ý rằng đường tròn ngoại tiếp ΔBC_1A_1 chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác BC_1HA_1 với đường kính BH. Vì thế áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác này ta có: $A_1C_1 = BH\sin B$.

Lại áp dụng định lý hàm số sin trong ΔBHC (với chú ý là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác này chính là R), ta có: $BH = 2R\sin\widehat{BCH} = 2R\cos B$

Từ đó có $A_1C_1 = 2R\sin B\cos B = R\sin 2B$.

Tương tự có $A_1B_1 = R\sin 2C$; $B_1C_1 = R\sin 2A$.

Vì thế $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R\sin A\sin B\sin C$

$$= 4R.8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.p \quad (1)$$

(chú ý là $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$).

Từ (1) suy ra $p_1 = \left(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)p$. (2)

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$. (3)

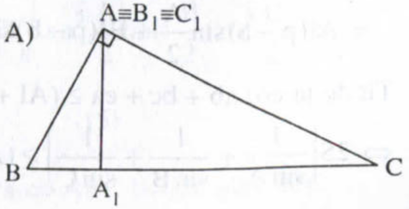
Kết hợp (2) (3) suy ra $p_1 \le \frac{1}{2}p \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

2. Nếu ABC là tam giác vuông (chẳng hạn tại A)

Khi đó $B_1 \equiv C_1 \equiv A$

Từ đó suy ra tam giác $A_1B_1C_1$ suy biến thành đoạn thẳng AA_1.



Vậy $p_1 = \frac{1}{2}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)$

$= \frac{1}{2}(AA_1 + AA_1)$ (ở đây $B_1C_1 = 0$)

$= AA_1$

Ta có $p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \Rightarrow \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}(AB + AC + BC)$.

Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a \Rightarrow AA_1 = \frac{bc}{a}$.

Khi đó $p_1 \le \frac{1}{2}p \Leftrightarrow \frac{bc}{a} \le \frac{1}{4}(a + b + c)$

$\Leftrightarrow 4bc \le a^2 + a(b + c)$. (4)

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 \ge 2bc$. (5)

Lại có $b + c \ge 2\sqrt{bc}$,

$a = \sqrt{b^2 + c^2} \ge \sqrt{2}\sqrt{bc}$

$\Rightarrow a(b + c) \ge 2\sqrt{2}\,bc > 2bc$. (6)

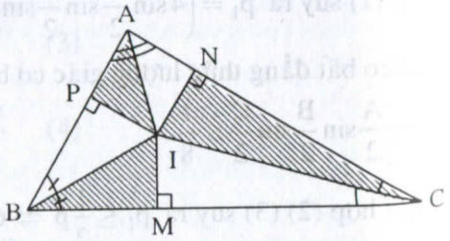
Từ (5) (6) suy ra $a^2 + a(b + c) > 4bc \Rightarrow$ (4) đúng

Tóm lại ta đã chứng minh được $p_1 \le \frac{1}{2}p$ và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 30. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

1. Chứng minh: $ab + bc + ca \ge (AI + BI + CI)^2$.
2. Chứng minh: $\dfrac{IA.IB.IC}{aIA^2 + bIB^2 + cIC^2} \le \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Giải



1. Kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IP \perp AB$.

Ta có: $AN = AP = p - a$;

$BP = BM = p - b$;

$CM = CN = p - a$.

Ta lại có:

$S = 2(S_{API} + S_{BMI} + S_{CNI})$

$= AI(p-a)\sin\frac{A}{2} + BI(p-b)\sin\frac{B}{2} + CI(p-c)\sin\frac{C}{2}$.

Từ đó ta có: $ab + bc + ca \ge (AI + BI + CI)^2$

$\Leftrightarrow 2S\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) \ge (AI + Bi + CI)^2$

$$\Leftrightarrow \left[AI(p-a)\sin\frac{A}{2} + BI(p-b)\sin\frac{B}{2} + CI(p-c)\sin\frac{C}{2}\right] \times$$

$$\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\right) \ge (AI + BI + CI)^2. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với:

$$a_1 = \sqrt{AI(p-a)\sin\frac{A}{2}};\ a_2 = \sqrt{BI(p-b)\sin\frac{B}{2}};\ a_3 = \sqrt{CI(p-c)\sin\frac{C}{2}}$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}};\ b_2 = \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}};\ b_3 = \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}}$$

(khi đó $a_1b_1 = \sqrt{AI\frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}} = \sqrt{AI.AI} = AI$; $a_2b_2 = BI$; $a_3b_3 = CI$).

Suy ra (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2. Theo định lý hàm số sin trong tam giác BIC, ta có:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin\frac{B+C}{2}} \Rightarrow IB = \frac{a\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\ \text{Tương tự } IC = \frac{b\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}};\ IA = \frac{c\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

Như vậy $IA.IB.IC = abc\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$. (2)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 \ge 3\sqrt[3]{IA^2IB^2IC^2}$. (3)

Từ (2) (3) suy ra

$$\frac{IA.IB.IC}{aIA^2 + bIB^2 + cIC^2} \le \frac{1}{3}\sqrt[3]{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}. \quad (4)$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi và đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$1 = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} \ge 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

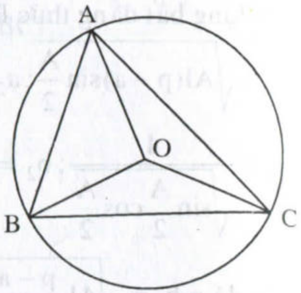
Thay (5) vào (4) và có đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 31. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O

1. Chứng minh: $ab + bc + ca \le (OA + OB + OC)^2$.
2. Chứng minh: $\dfrac{OA.OB.OC}{aOA^2 + bOB^2 + cOC^2} \ge \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Giải

1. Ta có:



$$ab + bc + ca \le (OA + OB + OC)^2$$

$$\Leftrightarrow 4R^2(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A) \le 9R^2$$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \frac{9}{4} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi và bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}.$$

Vậy (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2. Ta có: $\dfrac{OA.OB.OC}{aOA^2 + bOB^2 + cOC^2} \ge \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow \frac{R^3}{2R^3(\sin A + \sin B + \sin C)} \ge \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A + \sin B + \sin C} \ge \frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

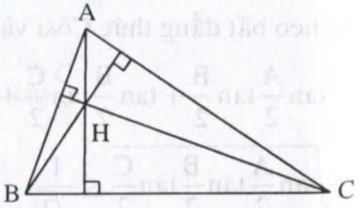
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 32. Cho ABC là tam giác nhọn với H là trực tâm

1. Chứng minh: $ab + bc + ca \le (HA + HB + HC)^2$.
2. Chứng minh: $\dfrac{HA.HB.HC}{aHA^2 + bHB^2 + cHC^2} \le \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Giải

1. Ta có:



$HA = 2R\cos A$,

$HB = 2R\cos B$,

$HC = 2R\cos C$.

Vì thế $ab + bc + ca \le (HA + HB + HC)^2$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le (\cos A + \cos B + \cos C)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A$$
$$\le \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B + 2\cos B\cos C + 2\cos C\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$$
$$\ge \sin A\sin B - \cos A\cos B + \sin B\sin C - \cos B\cos C + \sin C\sin A - \cos C\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$$
$$\ge \cos C + \cos B + \cos A. \quad (1)$$

Sử dụng công thức quen biết

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$, nên

$$(1) \Leftrightarrow 1 - 2\cos A\cos B\cos C + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$$
$$\ge \cos A + \cos B + \cos C$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \ge \cos A\cos B\cos C \quad (2)$$

Vì ABC là tam giác nhọn nên cosA, cosB, cosC đều là số dương nên

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{\cos A}\frac{1 - \cos B}{\cos B}\frac{1 - \cos C}{\cos C} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{\sin A}\frac{1 - \cos B}{\sin B}\frac{1 - \cos C}{\sin C}\tan A\tan B\tan C \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\tan A\tan B\tan C \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C \ge \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \ge \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \quad (3)$$

Vì A, B, C là các góc nhọn, nên ta có: $\begin{cases} \tan A + \tan B \ge 2\cot\dfrac{C}{2} \\ \tan B + \tan C \ge 2\cot\dfrac{A}{2} \\ \tan C + \tan A \ge 2\cot\dfrac{B}{2} \end{cases}$

Từ đó suy ra (3) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{HA.HB.HC}{aHA^2 + bHB^2 + cHC^2} \le \frac{HA.HB.HC}{3\sqrt[3]{abcHA^2.HB^2.HC^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{HA.HB.HC}{aHA^2 + bHB^2 + cHC^2} \le \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{HA.HB.HC}{abc}} \quad (4)$$

Do $\dfrac{HA.HB.HC}{abc}=\dfrac{8R^3\cos A\cos B\cos C}{8R^3\sin A\sin B\sin C}=\cot A\cot B\cot C$. (5)

Lại theo bất đẳng thức Côsi (chú ý do $\cot A>0$, $\cot B>0$, $\cot C>0$)

$$1=\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A\geq 3\sqrt[3]{(\cot A\cot B\cot C)^2}$$

$$\Rightarrow \cot A\cot B\cot C\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}.\qquad(6)$$

Từ (4) (5) (6) suy ra $\dfrac{HA.HB.HC}{aHA^2+bHB^2+cHC^2}\leq\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

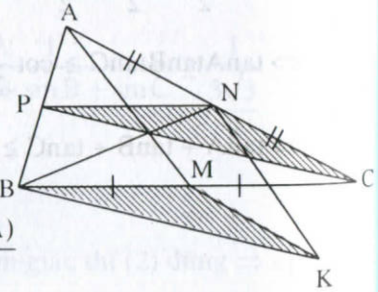
Bài 33. Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh là ba đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{R_1}{R}\geq\frac{4}{3}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Giải

Gọi AM, BN, CP là ba đường trung tuyến của tam giác ABC. Vẽ MK // AC và lấy MK = AN. Khi đó ANKM là hình bình hành.

Dễ thấy $\Delta PNC=\Delta BMK\Rightarrow$ BNK là tam giác có ba cạnh có độ dài bằng ba đường trung tuyến của ΔABC.



Dễ thấy $S_{BNK}=\dfrac{3}{4}S$ (1)

Ta có: $AM^2=m_a^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$

$$=\frac{2b^2+2c^2-(b^2+c^2-2bc\cos A)}{4}$$

$$=\frac{b^2+c^2+2bc\cos A}{4}.\qquad(2)$$

Vì $b^2+c^2\geq 2bc$, nên từ (2) có: $AM^2\geq\dfrac{2bc(1+\cos A)}{4}=bc\cos^2\dfrac{A}{2}$

$$\Rightarrow AM\geq\cos\frac{A}{2}\sqrt{bc}.\qquad(3)$$

Tương tự có $BN\geq\cos\dfrac{B}{2}\sqrt{ac}$; $CP\geq\cos\dfrac{C}{2}\sqrt{ab}$. (4)

Ta có: $R_1=\dfrac{AM.BN.CP}{4S_{BNK}}=\dfrac{AM.BN.CP}{3S}$. (5)

Từ (3) (4) (5) suy ra

$$R_1\geq\frac{abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{3\frac{abc}{4R}}\Rightarrow\frac{R_1}{R}\geq\frac{4}{3}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

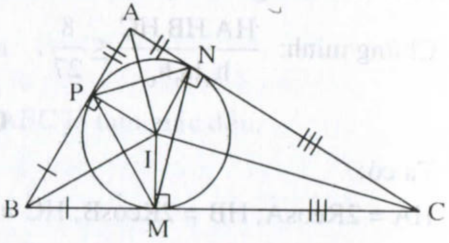
Bài 34. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với ba cạnh BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh: $\left(\dfrac{a}{a_1}\right)^2+\left(\dfrac{b}{b_1}\right)^2+\left(\dfrac{c}{c_1}\right)^2\geq 12$.

Giải

Ta có $AN=AP=p-a$

$BM=BP=p-b$

$CM=CN=p-c$.



Trong tam giác cân ANP, ta có

$$a_1=NP=2AP\sin\frac{A}{2}=2(p-a)\sin\frac{A}{2}$$

$$=(b+c-a)\sin\frac{A}{2}.$$

Từ đó $a_1^2=(b+c-a)^2\sin^2\dfrac{A}{2}=(b+c-a)^2\dfrac{1-\cos A}{2}$

$$=(b+c-a)^2\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}$$

$$=\frac{1}{4bc}(b+c-a)^2(a+b-c)(a+c-b)$$

$$=\frac{1}{4bc}\left[(b^2-(a-c)^2\right]\left[c^2(a-b)^2\right]\leq\frac{1}{4bc}b^2c^2$$

$$\Rightarrow a_1^2\leq\frac{bc}{4}.\qquad(1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=0\\a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Lập luận tương tự, có:

$$b_1^2\leq\frac{ac}{4},\qquad(2)$$

$$c_1^2\leq\frac{ab}{4}\qquad(3)$$

Dấu bằng xảy ra trong (2) và (3) $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2+\left(\frac{b}{b_1}\right)^2+\left(\frac{c}{c_1}\right)^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a_1^2b_1^2c_1^2}}. \quad (4)$$

Từ (1) (2) (3) ta có: $\frac{a^2b^2c^2}{a_1^2b_1^2c_1^2}\geq 64$. (5)

Thay (5) vào (4) và có: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2+\left(\frac{b}{b_1}\right)^2+\left(\frac{c}{c_1}\right)^2\geq 12$.

Đó là đpcm. Từ lập luận trên suy ra dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 35. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi H là trực tâm tam giác.

Chứng minh: $\frac{HA.HB.HC}{h_ah_bh_c}\leq\frac{8}{27}$.

Giải

Ta có:

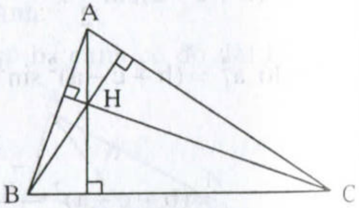
HA = 2RcosA; HB = 2RcosB; HC = 2RcosC.

Lại có: h_a = 2RsinBsinC; h_b = 2RsinCsinA; h_c = 2RsinAsinB.

Vì thế $\frac{HA.HB.HC}{h_ah_bh_c}\leq\frac{8}{27}$

$$\Leftrightarrow \frac{8R^3\cos A\cos B\cos C}{8R^3(\sin A\sin B\sin C)^2}\leq\frac{8}{27}$$

$\Leftrightarrow 27\cos A\cos B\cos C\leq 8(\sin A\sin B\sin C)^2$ (1)



Rõ ràng (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 36. Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{IA.IB.IC}{l_al_bl_c}\leq\frac{8}{27}$.

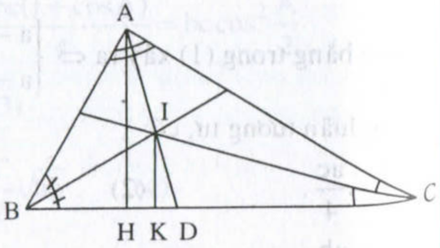
Giải

Kẻ AH và IK cùng vuông góc BC.

Theo định lí Talet, ta có: $\frac{IK}{AH}=\frac{ID}{AD}$

$$\Rightarrow \frac{r}{h_a}=\frac{l_a-IA}{l_a}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{S}{p}}{\frac{2S}{a}}=1-\frac{IA}{l_a}\Rightarrow\frac{IA}{l_a}=1-\frac{a}{2p}=\frac{2p-a}{2p}=\frac{b+c}{a+b+c}.$$



Tương tự $\frac{IB}{l_b}=\frac{a+c}{a+b+c}$; $\frac{IC}{l_c}=\frac{a+b}{a+b+c}$;

Vì vậy $\frac{IA.IB.IC}{l_al_bl_c}=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3}$. (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3}}$$

$\Rightarrow 8\geq 27\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\frac{IA.IB.IC}{l_al_bl_c}\leq\frac{8}{27}$ ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra dễ thấy khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

Nếu G là trọng tâm tam giác ABC, thì

$$\frac{GA.GB.GC}{m_am_bm_c}=\frac{\left(\frac{2}{3}m_a\right)\left(\frac{2}{3}m_b\right)\left(\frac{2}{3}m_c\right)}{m_am_bm_c}=\frac{8}{27}$$

Lúc này bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Bài 37. Cho tam giác ABC và gọi A_1, B_1, C_1 là chân ba đường cao của tam giác lần lượt kẻ từ A, B, C. Chứng minh $S\leq p_1R$, ở đây p_1 là nửa chu vi tam giác $A_1B_1C_1$.

Giải

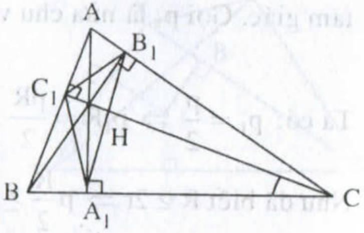
Xét các trường hợp sau:

1. Nếu ABC là tam giác nhọn.

Gọi H là trực tâm tam giác.

⇒ AC_1HB_1 là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AH. Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác AB_1C_1, ta có:

B_1C_1 = AHsinA.



Tương tự có:

C_1A_1 = BHsinB; A_1B_1 = CHsinC.

Từ đó

$$p_1R=\frac{1}{2}(R\sin A.AH+R\sin B.BH+R\sin C.CH)$$

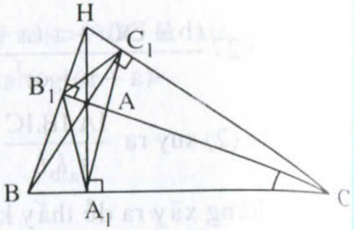
$$=\frac{1}{4}(AH.BC+BH.AC+CH.AB)$$

$$= \frac{1}{4}AH(BA_1 + A_1C) + \frac{1}{4}BH(AB_1 + B_1C) + \frac{1}{4}CH(AC_1 + C_1B)$$

$$= \frac{1}{2}S_{ABH} + \frac{1}{2}S_{ACH} + \frac{1}{2}S_{BCH} + \frac{1}{2}S_{ABH} + \frac{1}{2}S_{ACH} + \frac{1}{2}S_{BCH} = S$$

Như vậy trong trường hợp này xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức.

2. Nếu ABC là tam giác có góc tù (chẳng hạn $A > 90^0$)



Dễ thấy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC bằng R.

Do HBC là tam giác có ba góc nhọn,

nên theo phần 1, ta có: $S_{HBC} = p_1R$,

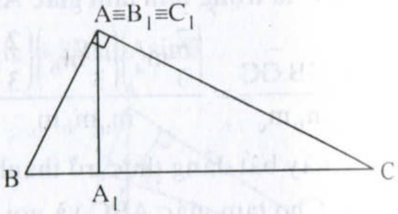
ở đây p_1 là nửa chu vi tam giác $A_1B_1C_1$.

Rõ ràng $S_{HBC} > S_{ABC} \Rightarrow S < p_1R$

Vậy bất đẳng thức đúng trong trường hợp này.

3. Nếu ABC là tam giác vuông tại A

Khi đó $\Delta A_1B_1C_1$ suy biến thành đoạn thẳng AA_1. Khi đó



$$p_1 = \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1)$$

$$= \frac{1}{2}(A_1A + A_1A + 0) = A_1A$$

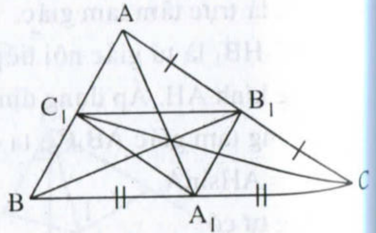
Ta có $R = \frac{BC}{2}$, nên $p_1R = \frac{AA_1.BC}{2} = S$

Vậy xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức.

Tóm lại ta luôn có $S \le p_1R$. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác không có góc tù.

Bài 38. Cho tam giác ABC và gọi AA_1, BB_1, CC_1 là ba đường trung tuyến của tam giác. Gọi p_1 là nửa chu vi tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh: $S \le p_1R$.

Giải



Ta có: $p_1 = \frac{p}{2} \Rightarrow p_1R = \frac{pR}{2}$.

Như đã biết $R \ge 2r \Rightarrow p\frac{R}{2} \ge pr = S$

Từ đó suy ra $S \le p_1R \Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều (vì khi đó R = 2r).

Bài 39. Cho tam giác ABC và I là một điểm nằm trong tam giác. Đặt $\widehat{BIC} = \alpha$, $\widehat{AIC} = \beta$, $\widehat{AIB} = \gamma$. Chứng minh rằng với mọi vị trí của M nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC ta có:

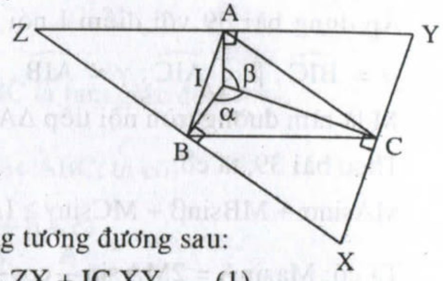
$$MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma \ge IA\sin\alpha + IB\sin\beta + IC\sin\gamma.$$

Giải

Qua A, B, C vẽ lần lượt ba đường thẳng tương ứng vuông góc IA, IB, IC. Ba đường này cắt nhau tại X, Y, Z (xem hình vẽ).

Gọi R là bán kính dđường tròn ngoại tiếp ΔXYZ.

Theo định lí hàm số sin trong ΔXYZ, ta có:



$$\sin X = \frac{YZ}{2R};\ \sin Y = \frac{ZX}{2R};\ \sin Z = \frac{XY}{2R}.$$

Vì $X + \alpha = Y + \beta = Z + \gamma = 180^0$

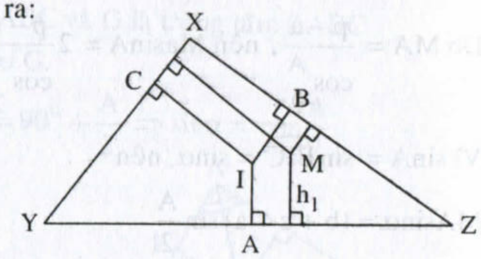
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{YZ}{2R};\ \sin\beta = \frac{ZX}{2R} \text{ và } \sin\gamma = \frac{XY}{2R}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh có dạng tương đương sau:

$$MA.YZ + MB.ZX + MC.XY \ge IA.YZ + IB.ZX + IC.XY \qquad (1)$$

Chỉ có hai khả năng sau có thể xảy ra:

1. Nếu M nằm bên trong ΔXYZ



Gọi h_1, h_2, h_3 lần lượt là khoảng cách từ M xuống YZ, XZ, XY

Rõ ràng ta có:

$MA \ge h_1$, $MB \ge h_2$, $MC \ge h_3$.

Từ đó

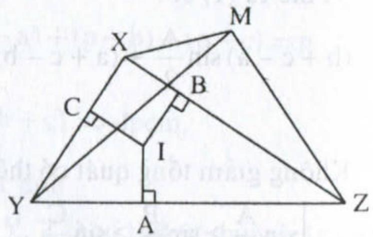
$$MA.YZ + MB.ZX + MC.XY \ge h_1.YZ + h_2.ZX + h_3.XY$$

$$\Rightarrow MA.YZ + MB.ZX + MC.XY \ge 2S_{XYZ}. \qquad (2)$$

Rõ ràng $IA.YZ + IB.ZX + IC.XY = 2S_{XYZ}$. (3)

Từ (2) (3) suy ra (1) đúng. Dấu bằng xảy ra ⇔ M ≡ I.

2. Nếu M nằm ngoài tam giác XYZ



Lí luận như phần 1/ ta có:

$$MA.YZ + MB.ZX + MC.XY$$

$$\ge 2(S_{MYZ} + S_{MZY} + S_{MXY}) > 2S_{XYZ}.$$

Từ đó suy ra (1) đúng và không có dấu bằng.

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ M ≡ I.

Bài 40. Chứng minh rằng nếu ABC là tam giác nhọn thì

$$3(a\cos A + b\cos B + c\cos C) \le (a + b + c)\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right).$$

Giải

Gọi I là trực tâm ΔABC

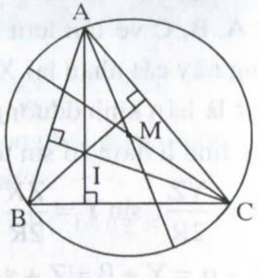
Ta có $\widehat{BIC} = 180^0 - A \Rightarrow IA\sin\widehat{BIC} = IA\sin A$

Dễ thấy theo các bài trên (do I là trực tâm ΔABC) nên IA = 2RcosA

$\Rightarrow IA\sin\widehat{BIC} = 2R\sin A\cos A = a\cos A$

Lập luận tương tự có:

$IB\sin\widehat{AIC} = b\cos B;\ IC\sin\widehat{AIB} = c\cos C$



Áp dụng bài 39 với điểm I nói trên và

$\alpha = \widehat{BIC}$; $\beta = \widehat{AIC}$; $\gamma = \widehat{AIB}$, còn lấy

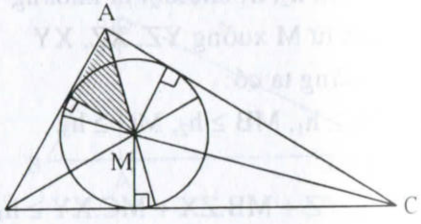
M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Theo bài 39, ta có:

$MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma \geq IA\sin\alpha + IB\sin\beta + IC\sin\gamma \quad (1)$

Ta có: $MA\sin A = 2MA\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

Do $MA = \dfrac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$, nên $MA\sin A = 2\dfrac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = (b+c-a)\sin\frac{A}{2}$.



Vì $\sin A = \sin\widehat{BIC} = \sin\alpha$, nên

$MA\sin\alpha = (b+c-a)\sin\frac{A}{2}$

Tương tự $MB\sin\beta = (a+c-b)\sin\frac{B}{2}$,

$MC\sin\gamma = (a+b-c)\sin\frac{C}{2}$.

Vì thế từ (1) có:

$$(b+c-a)\sin\frac{A}{2} + (a+c-b)\sin\frac{B}{2} + (a+b-c)\sin\frac{C}{2} \geq a\cos A + b\cos B + c\cos C. \quad (2)$$

Không giảm tổng quát có thể giả sử $A \geq B \geq C \Rightarrow a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{A}{2} \geq \sin\frac{B}{2} \geq \sin\frac{C}{2} \\ b+c-a \leq a+c-b \leq a+b-c. \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Trêbưsép, thì

$$\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)\left[(b+c-a)+(a+c-b)+(a+b-c)\right]$$
$$\geq 3\left[(b+c-a)\sin\frac{A}{2} + (a+c-b)\sin\frac{B}{2} + (a+b-c)\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$\text{hay } (a+b+c)\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$
$$\geq 3\left[(b+c-a)\sin\frac{A}{2} + (a+c-b)\sin\frac{B}{2} + (a+b-c)\sin\frac{C}{2}\right]. \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = C \\ M \equiv I \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 41. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$m_a\cos\frac{A}{2} + m_b\cos\frac{B}{2} + m_c\cos\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}(a+b+c).$$

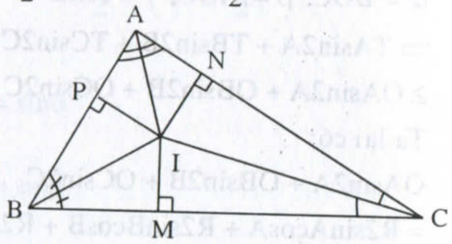
Giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ABC và G là trọng tâm ΔABC

Áp dụng bài 39 với điểm I và M ≡ G.

Khi đó $\alpha = \widehat{BIC} = 180^0 - \frac{B+C}{2} = 90^0 + \frac{A}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\frac{A}{2}$.

Vậy $IA\sin\alpha = IA\cos\frac{A}{2}$



= AP = AN = p − a.

Tương tự $IB\sin\beta = p - c$; $IC\sin\gamma = p - c$.

Theo bài 39 ta có:

$$GA\cos\frac{A}{2} + GB\cos\frac{B}{2} + GC\cos\frac{C}{2} \geq IA\sin\alpha + IB\sin\beta + IC\sin\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\left(m_a\cos\frac{A}{2} + m_b\cos\frac{B}{2} + m_c\cos\frac{C}{2}\right) \geq (p-a)+(p-b)+(p-c) = p$$

$$\Rightarrow m_a\cos\frac{A}{2} + m_b\cos\frac{B}{2} + m_c\cos\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}(a+b+c) \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ G ≡ I ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 42. Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh:

2(YZcosA + ZXcosB + XYcosC) ≥ BCcosA + CAcosB + AbcosC.

Giải

Rõ ràng ba đường tròn ngoại tiếp các ΔAZY, BZX và CXY đồng quy tại điểm T trong tam giác.

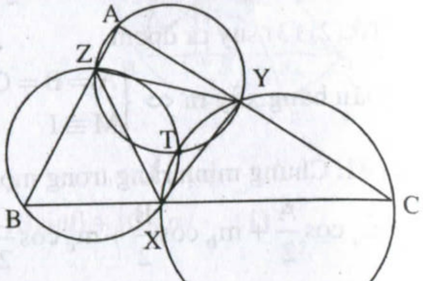
Gọi O và R là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi R_1, $R_2 < R_3$ lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các ΔAZY, BZX và CXY.

Theo định lí hàm số sin ta có:

$YZ = 2R_1\sin A;\ ZX = 2R_2\sin B;\ XY = 2R_3\sin C$

Do vậy $2(YZ\cos A + ZX\cos B + XY\cos C)$

$= 2(R_1\sin 2A + R_2\sin 2B + R_3\sin 2C).\quad (1)$



Rõ ràng $2R_1 \geq TA;\ 2R_2 \geq TB;\ 2R_3 \geq TC$ và do ABC là tam giác nhọn nên $\sin 2A \geq 0;\ \sin 2B \geq 0;\ \sin 2C \geq 0$, vì thế ta có:

VT(1)

$\geq TA\sin 2A + TB\sin 2B + TC\sin 2C.\quad (2)$

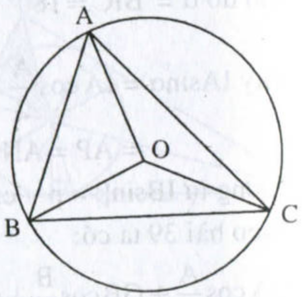
Rõ ràng ta có:

$2A = \widehat{BOC},\ 2B = \widehat{AOC},\ 2C = \widehat{AOB}$

Do vậy từ (2) có:

$VT(1) \geq TA\sin\widehat{BOC} + TB\sin\widehat{AOC} + TC\sin\widehat{AOB}\quad (3)$

Áp dụng bài 39 với $I \equiv O$, $M \equiv T$, ta có:



$\alpha = \widehat{BOC},\ \beta = \widehat{AOC},\ \gamma = \widehat{AOB}$

$\Rightarrow TA\sin 2A + TB\sin 2B + TC\sin 2C$

$\geq OA\sin 2A + OB\sin 2B + OC\sin 2C\quad (4)$

Ta lại có:

$OA\sin 2A + OB\sin 2B + OC\sin 2C$

$= R2\sin A\cos A + R2\sin B\cos B + R2\sin C\cos C$

$= a\cos A + b\cos B + c\cos C\quad (5)$

Từ (4) (5) suy ra

$TA\sin 2A + TB\sin 2B + TC\sin 2C \geq a\cos A + b\cos B + c\cos C\quad (6)$

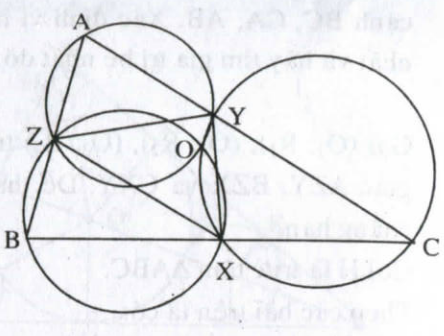
Từ (1) (3) (6) đi đến

$2(YZ\cos A + ZX\cos B + XY\cos C) \geq BC\cos A + CA\cos B + AB\cos C$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} TA = 2R_1 \\ TB = 2R_2 \\ TC = 2R_3 \\ T \equiv O \end{cases} \Leftrightarrow$ X, Y, Z lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB.

Bài 43. Cho tam giác nhọn ABC. X, Y, Z tương ứng là ba điểm trên ba cạnh BC, AC, AB. Chứng minh: $\dfrac{YZ}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{ZX}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{XY}{\sin\frac{C}{2}} \geq a + b + c$.

Giải



Giả sử ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác AYZ, BZX, CXY cắt nhau tại O.

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của các đường tròn trên.

Theo định lý hàm số sin thì

$YZ = 2R_1\sin A \geq OA\sin A$

(do $\sin A > 0$, $2R_1 \geq OA$)

Từ đó $\dfrac{YZ}{\sin\frac{A}{2}} \geq \dfrac{OA\sin A}{\sin\frac{A}{2}} = 2OA\cos\dfrac{A}{2}$

Lập luận tương tự có: $\dfrac{ZX}{\sin\frac{B}{2}} \geq 2OB\cos\dfrac{B}{2}$; $\dfrac{XY}{\sin\frac{C}{2}} \geq 2OC\cos\dfrac{C}{2}$.

Như vậy ta có:

$$\frac{YZ}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{ZX}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{XY}{\sin\frac{C}{2}} \geq 2\left(OA\cos\frac{A}{2} + OB\cos\frac{B}{2} + OC\cos\frac{C}{2}\right).\quad (1)$$

Ta có: $\cos\dfrac{A}{2} = \sin\dfrac{B+C}{2} = \sin\widehat{BIC} = \sin\alpha$

$\cos\dfrac{B}{2} = \sin\dfrac{C+A}{2} = \sin\widehat{AIC} = \sin\beta$

$\cos\dfrac{C}{2} = \sin\dfrac{A+B}{2} = \sin\widehat{AIB} = \sin\gamma$,

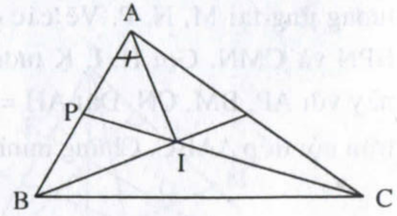
ở đây I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Áp dụng bài 39 với $M \equiv O$, ta có:

$OA\sin\alpha + OB\sin\beta + OC\sin\gamma \geq IA\sin\alpha + IB\sin\beta + IC\sin\gamma$

$$\Rightarrow 2\left(OA\cos\frac{A}{2} + OB\cos\frac{B}{2} + OC\cos\frac{C}{2}\right) \geq 2(IA\sin\alpha + IB\sin\beta + IC\sin\gamma)\ (2)$$

Do $IA\sin\alpha = IA\cos\dfrac{A}{2} = AP = p - a$.



Tương tự $IB\sin\beta = p - b$; $IC\sin\gamma = p - c$

Từ đó và từ (2) suy ra

$2\left(OA\cos\dfrac{A}{2} + OB\cos\dfrac{B}{2} + OC\cos\dfrac{C}{2}\right)$

$\geq 2[(p - a) + (p - b) + (p - c)] = a + b + c\quad (3)$

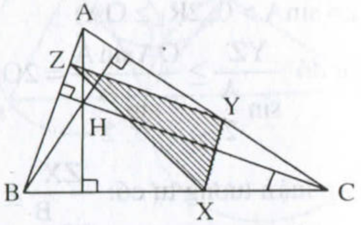
Từ (1) (3) suy ra đpcm.

Bài 44. Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thay đổi trên các cạnh BC, CA, AB. Xác định vị trí của X, Y, Z để chu vi tam giác XYZ bé nhất và hãy tìm gia trị bé nhất đó.

Giải

Gọi $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$, $(O_3; R_3)$ tương ứng là đường tròn ngoại tiếp các tam giác AZY, BZX và CXY. Dễ thấy ba đường tròn này đồng quy tại điểm T chẳng hạn.

Gọi H là trực tâm ΔABC.



Theo các bài trên ta có:

$$\begin{cases} ZY \geq TA\sin A = TA\sin\widehat{BHC} & (1)\\ ZX \geq TB\sin B = TB\sin\widehat{AHC} & (2)\\ XY \geq TC\sin C = TC\sin\widehat{AHB} & (3)\end{cases}$$

Dấu bằng có trong (1) (2) (3) $\Leftrightarrow TA = 2R_1, TB = 2R_2, TC = 2R_3$

Áp dụng bài 39 với $I \equiv H$, $M \equiv T$, ta có:

$$TA\sin\widehat{BHC} + TB\sin\widehat{AHC} + TC\sin\widehat{AHB}$$
$$\geq HA\sin\widehat{BHC} + HB\sin\widehat{AHC} + HC\sin\widehat{AHB} \quad (4)$$

Từ (1) (2) (3) (4) đi đến

$$T_{XYZ} \geq HA\sin\widehat{BHC} + HB\sin\widehat{AHC} + HC\sin\widehat{AHB}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ có dấu bằng trong (1) (2) (3) và $T \equiv H$

$\Leftrightarrow$ X, Y, Z tương ứng là chân các đường cao kẻ từ A, B, C.

Dễ thấy $HA\sin\widehat{BHC} = R\sin 2A$,

$HA\sin\widehat{BHC} = R\sin 2A$,

$\Rightarrow$ VP (5) = R(sin2A + sin2B + sin2C) = 4RsinAsinBsinC.

Vậy $\min T_{XYZ} = 4R\sin A\sin B\sin C \Leftrightarrow$ X, Y, Z lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C.

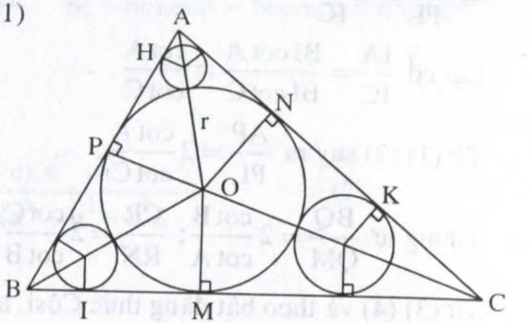
Bài 45. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với ba cạnh BC, AC, AB tương ứng tại M, N, P. Vẽ các đường tròn nội tiếp các tam giác cong ANP, BPN và CMN. Gọi H, I, K tương ứng là các tiếp điểm của các đường tròn này với AP, BM, CN. Đặt AH = x, BI = y, CK = z và gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh: $x + y + z \geq r\sqrt{3}$.

Giải

Gọi r_1, r_2, r_3 tương ứng là đường tròn nội tiếp các tam giác cong ANP, BPM và CMN.

Theo phần đẳng thức lượng giác trong tam giác), ta có:

$$\sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1} = r. \quad (1)$$



Ta có: $x = AH = \dfrac{r_1}{\tan\dfrac{A}{2}}$.

Tương tự:

$$y = \frac{r_2}{\tan\dfrac{B}{2}};\ z = \frac{r_3}{\text{ran}\dfrac{C}{2}}.$$

Từ đó $xy + yz + zx = \dfrac{r_1r_2}{\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}} + \dfrac{r_2r_3}{\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}} + \dfrac{r_3r_1}{\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với:

$$a_1 = \sqrt{\frac{r_1r_2}{\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}};\ a_2 = \sqrt{\frac{r_2r_3}{\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}}};\ a_3 = \sqrt{\frac{r_3r_1}{\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}}}$$

$$b_1 = \sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}};\ b_2 = \sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}};\ b_3 = \sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}},$$

và để ý là $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$,

khi đó ta có $xy + yz + zx \geq \left(\sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1}\right)^2$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $xy + yz + zx \geq r^2$ (3)

Lại có $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ (4)

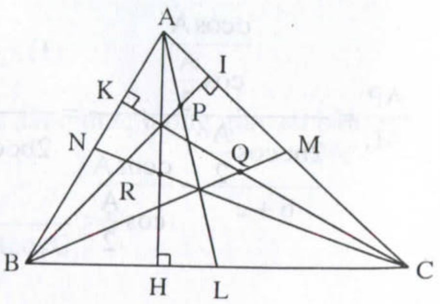
Kết hợp (3) (4) ta thu được $x + y + z \geq r\sqrt{3} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 46. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi AH, BI, CK là ba đường cao và AL, BM, CN là ba trung tuyến. Giả sử $AL \cap BI = P$, $BM \cap CK = Q$, $CN \cap AH = R$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{AP}{PL} + \dfrac{BQ}{QM} + \dfrac{CR}{RN} \geq 6$.

Giải



Áp dụng định lý Menelauyt trong ΔALC, với cát tuyến BPI, ta có:

$$\frac{LB}{BC}\frac{CI}{IA}\frac{AP}{PL} = 1.$$

Do $\dfrac{LB}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{CI}{IA}\dfrac{AP}{PL} = 2$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PL} = 2\frac{IA}{IC}. \quad (1)$$

Lại có $\frac{IA}{IC} = \frac{BI\cot A}{BI\cot C} = \frac{\cot A}{\cot C}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\frac{AP}{PL} = 2\frac{\cot A}{\cot C}$ (3)

Tương tự $\frac{BQ}{QM} = 2\frac{\cot B}{\cot A}$; $\frac{CR}{RN} = 2\frac{\cot C}{\cot B}$ (4)

Từ (3) (4) và theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{AP}{PL} + \frac{BQ}{QM} + \frac{CR}{RN} \ge 3\sqrt[3]{8\frac{\cot A}{\cot C}\frac{\cot B}{\cot A}\frac{\cot C}{\cot B}} = 6 \quad (5)$$

Đó là đpcm.

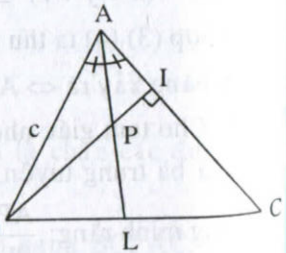
Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{AP}{PL} = \frac{BQ}{QM} = \frac{CR}{RN}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cot A}{\cot C} = \frac{\cot B}{\cot A} = \frac{\cot C}{\cot B}$$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 47. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi AH, BI, CK là ba chiều cao và AL, BM, CN là ba đường phân giác trong. Giả sử AL ∩ BI = P, BM ∩ CK = Q, CN ∩ AH = R. Chứng minh: $\frac{AP}{PL} + \frac{BQ}{QM} + \frac{CP}{RN} \ge 6$.

Giải



Ta có: $\frac{AP}{PL} = \frac{AP}{l_a - AP}$. (1)

Do $AP = \frac{AI}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{c\cos A}{\cos\frac{A}{2}}$, $l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$,

nên từ (1) có:

$$\frac{AP}{AL} = \frac{\dfrac{c\cos A}{\cos\frac{A}{2}}}{\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} - \dfrac{c\cos A}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{(b+c)c\cos A}{2bc\cos^2\frac{A}{2} - c(b+c)\cos A}$$

$$= \frac{c(b+c)\cos A}{bc(1+\cos A) - c(b+c)\cos A} = \frac{c(b+c)\cos A}{bc + bc\cos A - bc\cos A - c^2\cos A}$$

$$= \frac{c(b+c)\cos A}{c(b - c\cos A)}.$$

$$= \frac{(b+c)\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{b - c\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{c(a^2+b^2-c^2)}. \quad (2)$$

Lập luận tương tự có:

$$\frac{BQ}{QM} = \frac{(c+a)(c^2+a^2-b^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}; \quad \frac{CP}{RN} = \frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{b(a^2+c^2-b^2)}. \quad (3)$$

Từ (2) (3) và theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{AP}{PL} + \frac{BQ}{QM} + \frac{CP}{RN} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}. \quad (4)$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi thì

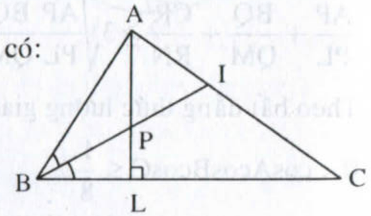
$a+b \ge 2\sqrt{ab}$; $b+c \ge 2\sqrt{bc}$; $c+a \ge 2\sqrt{ca}.\sqrt{5}$

Từ (4) (5) suy ra $\frac{AP}{PL} + \frac{BQ}{QM} + \frac{CP}{RN} \ge 6 \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 48. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi AH, BI, CK là ba đường phân giác và AL, BM, CN là ba đường cao. Giả sử AL ∩ BI = P, BM ∩ CK = Q, CN ∩ AH = R. Chứng minh: $\frac{AP}{PL} + \frac{BQ}{QM} + \frac{CP}{RN} \ge 6$

Giải



Theo tính chất của đường phân giác trong, ta có:

$\frac{AP}{PL} = \frac{AB}{BL} = \frac{1}{\cos B}$

Tương tự $\frac{BQ}{QM} = \frac{1}{\cos C}$; $\frac{CR}{RN} = \frac{1}{\cos A}$.

Từ đó $\frac{AP}{PL}\frac{BQ}{QM}\frac{CR}{RN} = \frac{1}{\cos A\cos B\cos C}$ (1)

Do ABC là tam giác nhọn và theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác ta có:

$$0 < \cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{\cos A\cos B\cos C} \ge 8$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PL}\frac{BQ}{QM}\frac{CR}{RN} \geq 8. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì $\frac{AP}{PL}+\frac{BQ}{QM}+\frac{CR}{RN} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AP}{PL}\frac{BQ}{QM}\frac{CR}{RN}}$. (3)

Từ (2) (3) suy ra đpcm.

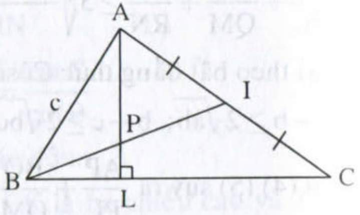
Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 49. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi AH, BI, CK là ba đường trung tuyến và AL, BM, CN là ba đường cao. Giả sử $AL \cap BI = P$, $BM \cap CK = Q$, $CN \cap AH = R$.

Chứng minh: $\frac{AP}{PL}+\frac{BQ}{QM}+\frac{CR}{RN} \geq 6$.

Giải

Áp dụng định lý Menelauyt trong ΔALC với cát tuyến BPI, ta có:



$$\frac{LB}{BC}\frac{CI}{IA}\frac{AP}{PL} = 1$$

Vì $\frac{CI}{LB} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PL}\frac{LB}{BC} = 1$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PL} = \frac{BC}{LB} = \frac{a}{c\cos B}$$

Tương tự $\frac{BQ}{QM} = \frac{b}{a\cos C}$ và $\frac{CP}{RN} = \frac{c}{b\cos A}$.

Từ đó ta có: $\frac{AP}{PL}\frac{BQ}{QM}\frac{CP}{RN} = \frac{1}{\cos A\cos B\cos C}$. (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{AP}{PL}+\frac{BQ}{QM}+\frac{CR}{RN} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AP}{PL}\frac{BQ}{QM}\frac{CR}{RN}} \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác, thì

$$0 < \cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8} \qquad (3)$$

(do ABC là tam giác nhọn)

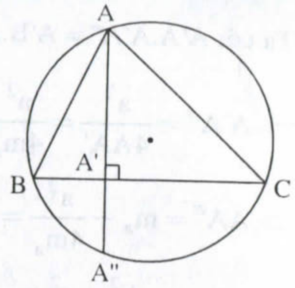
Từ (1) (2) (3) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là Δ đều.

Bài 50. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn. Các đường cao AA′, BB′, CC′ tương ứng kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tại A″, B″, C″.

Đặt $AA'' = h'_a$; $BB'' = h'_b$; $CC'' = h'_c$. Chứng minh:

$$\sqrt{h_a h'_a} + \sqrt{h_b h'_b} + \sqrt{h_c h'_c} \leq 2p.$$

Giải



Ta có: $AA' = h_a = 2R\sin B\sin C$

$h_b = 2R\sin C\sin A$

$h_c = 2R\sin A\sin B$.

Lại có: $AA'' = h'_a \leq 2R$

$$\Rightarrow \sqrt{h_a h'_a} \leq 2R\sqrt{\sin B\sin C} \leq R(\sin B + \sin C)$$

$$\Rightarrow \sqrt{h_a h'_a} \leq \frac{b+c}{2}. \qquad (1)$$

Tương tự có: $\sqrt{h_b h'_b} \leq \frac{c+a}{2}$, (2)

$\sqrt{h_c h'_c} \leq \frac{a+b}{2}$. (3)

Cộng từng vế (1) (2) (3) suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

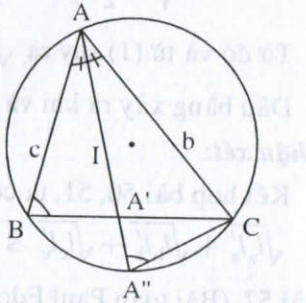
Nhận xét:

1. Xét bài toán tương tự khi thay AA′, BB′, CC′ là các đường phân giác.

Kí hiệu l'_a, l'_b, l'_c tương tự như trong bài trên. Khi đó ta cũng có bất đẳng thức:

$$\sqrt{l_a l'_a} + \sqrt{l_b l'_b} + \sqrt{l_c l'_c} \leq 2p.$$

Thật vậy ta có $\Delta ABA' \backsim \Delta AA''C$



$$\Rightarrow \frac{AB}{AA''} = \frac{AA'}{AC} \Rightarrow \frac{c}{l'_a} = \frac{l_a}{b}$$

$$\Rightarrow bc = l_a l'_a$$

$$\Rightarrow \sqrt{l_a l'_a} = \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}. \qquad (1)$$

Tương tự $\sqrt{l_b l'_b} \leq \frac{c+a}{2}$, (2)

$\sqrt{l_c l'_c} \leq \frac{a+b}{2}$. (3)

Cộng từng vế (1) (2) (3) suy ra đpcm.

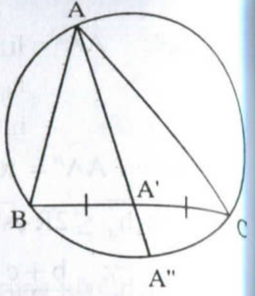
Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 51. Cho tam giác ABC với ba đường trung tuyến AA′, BB′, CC′. AA′, BB′, CC′ kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt tại A″, B″, C″.

Kí hiệu $AA'' = m'_a$; $BB'' = m'_b$; $CC'' = m'_c$. Chứng minh:

$$\sqrt{m_a m'_a} + \sqrt{m_b m'_b} + \sqrt{m_c m'_c} \geq 2p.$$

Giải



Ta có: $A'A.A'A'' = A'B.A'C = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow A'A'' = \frac{a^2}{4AA'} = \frac{a^2}{4m_a}$

$\Rightarrow AA'' = m_a + \frac{a^2}{4m_a} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + a^2}{4m_a} = \frac{b^2 + c^2}{2m_a}$

$\Rightarrow m_a m'_a = \frac{b^2 + c^2}{2}$.

Lập luận tương tự có: $m_b m'_b = \frac{c^2 + a^2}{2}$; $m_c m'_c = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Từ đó $\sqrt{m_a m'_a} + \sqrt{m_b m'_b} + \sqrt{m_c m'_c} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ (1)

Ta có: $\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{(b+c)^2}{4}} = \frac{a+b}{2}$

$\sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} \geq \frac{c+a}{2}$; $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.

Từ đó và từ (1) suy ra $\sqrt{m_a m'_a} + \sqrt{m_b m'_b} + \sqrt{m_c m'_c} \geq 2p \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

Kết hợp bài 50, 51, ta có kết quả "lí thú" sau:

$\sqrt{l_a l'_a} + \sqrt{l_b l'_b} + \sqrt{l_c l'_c} \leq \sqrt{m_a m'_a} + \sqrt{m_b m'_b} + \sqrt{m_c m'_c}$.

Bài 52. (Bài toán Paul Edos)

Cho tam giác ABC. M là một điểm trong tam giác. Đặt MA = x, MB = y, MC = z. Gọi p, q, r là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, AC, AB tương ứng

1. Chứng minh: $x \geq \frac{cq + br}{a}$.
2. Chứng minh: $x + y + z \geq 2(p + q + r)$ (Bất đẳng thức Paul Edos).
3. Chứng minh:

$$\frac{q+r}{q+2a+r} + \frac{r+p}{r+2y+p} + \frac{p+q}{p+2z+q} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{x}{q+r} + \frac{y}{r+p} + \frac{z}{p+q}\right).$$

4. Chứng minh: $ax + by + cz \geq 2(ap + bq + cz)$

Giải

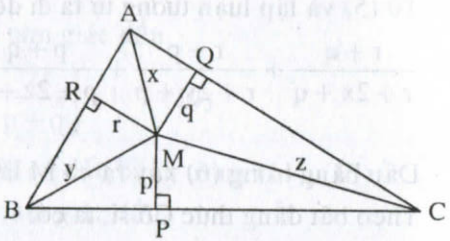
1. Ta có: $x \geq \frac{cq + br}{a}$

$\Leftrightarrow ax \geq cq + br$

$\Leftrightarrow x\sin A \geq q\sin C + r\sin B$

$\Leftrightarrow x^2\sin^2 A \geq q^2\sin^2 C + r^2\sin^2 B + 2qr\sin B\sin C.$ (1)

Gọi P, Q, R là hình chiếu của M lên BC, CA, AB



Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác ARQ và chú ý là tam giác ARQ và tứ giác ARMQ có chung đường tròn ngoại tiếp có đường kính là MA = x, khi đó ta có:

$RQ = x\sin A.$ (2)

Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔMRQ và có:

$QR^2 = r^2 + q^2 - 2rq\cos\widehat{RMQ}$

$\Rightarrow QR^2 = r^2 + q^2 + 2rq\cos A.$ (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có:

$R^2 + q^2 + 2rq\cos A \geq q^2\sin^2 C + r^2\sin^2 B + 2qr\sin B\sin C$, hay

$r^2\cos^2 B + q^2\cos^2 C - 2rq\cos B\cos C \geq 0$

(do $\cos A = -\cos(B + C) = \sin B\sin C - \cos B\cos C$)

$\Rightarrow (r\cos B - q\cos C)^2 \geq 0.$ (4)

Vì (4) hiển nhiên đúng nên suy ra đpcm.

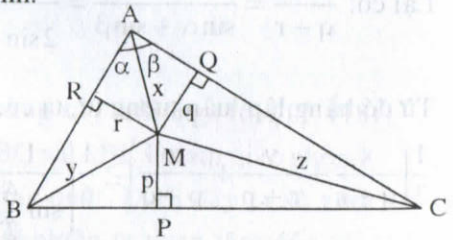
2. Lí luận tương tự như phần 1/ có:

$y \geq \frac{ar + cp}{b}$; $z \geq \frac{aq + bp}{c}$.

Kết hợp với phần 1/ $x \geq \frac{cq + br}{a}$, ta có: $x + y + z \geq 2(p + q + r)$.

Bất đẳng thức Paul Edos được chứng minh.

3. Đặt $\widehat{RAM} = \alpha$, $\widehat{MAQ} = \beta$.



Khi đó ta có:

$$\frac{r+q}{r+2x+q} = \frac{x(\sin\alpha + \sin\beta)}{x(\sin\alpha + \sin\beta + 2)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\left(1 + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{1 + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}. \quad (4)$$

Ta có:

$1+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \le 1+\sin\frac{A}{2}$, nên từ (4) suy ra

$$\frac{r+q}{r+2x+q} \le 1-\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}. \qquad (5)$$

Dấu bằng xảy ra trong (5) ⇔ α = β ⇔MA là phân giác của góc A

Từ (5) và lập luận tương tự ta đi đến

$$\frac{r+q}{r+2x+q}+\frac{r+p}{r+2y+p}+\frac{p+q}{p+2z+q} \le 3-\left(\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\right) \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra ⇔ M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\left(\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\right)\left[\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)+\left(1+\sin\frac{B}{2}\right)+\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)\right] \ge 9 \quad (7)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 3+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \le \frac{9}{2} \qquad (8)$$

Từ (7) (8) đi đến $\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}} \ge 2. \quad (9)$

Từ (6), (9) suy ra: $\frac{r+q}{r+2x+q}+\frac{r+p}{r+2y+p}+\frac{p+q}{p+2z+q} \le 1 \quad (10)$

Dấu bằng trong (10) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều và M là tâm của nó.

Lại có: $\frac{x}{q+r}=\frac{1}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \ge \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}$.

Từ đó bằng lập luận tương tự, ta có:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{q+r}+\frac{y}{r+p}+\frac{z}{p+q}\right) \ge \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right). \quad (11)$$

Dấu bằng trong (11) xảy ra ⇔ M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Theo bất đẳng thức Côsi lại có

$$\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right) \ge 9 \quad (12)$$

Vì $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$, nên từ (12) có

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \ge 6. \qquad (13)$$

Dấu bằng trong (13) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

Từ (11), (13) suy ra $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{q+r}+\frac{y}{r+p}+\frac{z}{p+q}\right) \ge 1 \quad (14)$

Dấu bằng trong (14) xảy ra ⇔ đồng thời có dấu bằng trong (11), (13)

⇔ ABC là tam giác đều.

Bây giờ từ (10), (14) đi đến

$$\frac{r+q}{r+2x+q}+\frac{r+p}{r+2y+p}+\frac{p+q}{p+2z+q} \le \frac{1}{3}\left(\frac{x}{q+r}+\frac{y}{r+p}+\frac{z}{p+q}\right)$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

4. Trong tam giác AMP, ta có:

AM + MP ≥ AP

⇒ x + p ≥ AP

$\Rightarrow x+p \ge h_a \qquad (15)$

Dấu bằng xảy ra ⇔ A, M, P thẳng hàng

Từ (15) có $ax+ap \ge ah_a \qquad (16)$

Lập luận tương tự có $by+bq \ge bh_b \qquad (17)$

$cz+cr \ge ch_c \qquad (18)$

Cộng từng vế (16) (17) (18) có $ax+by+cz+ap+bq+cr \ge 6S$

$\Rightarrow ax+by+cz+2S \ge 6S$

$\Rightarrow ax+by+cz \ge 4S$

$\Rightarrow ax+by+cz \ge 2(ap+bq+cr)$.

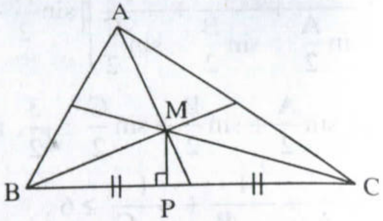
Đó là đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ đồng thời có dấu bằng xảy ra trong (16) (17) (18)

⇔ M là trực tâm ΔABC và ABC là tam giác nhọn.

Nhận xét: Bất đẳng thức Paul Edos là tổng quát. Dưới đây ta sẽ xem xét các trường hợp riêng đặc biệt của nó và dĩ nhiên ta quan tâm đến việc: Trong các trường hợp riêng thì chứng minh bất đẳng thức Paul Edos có thực sự là đơn giản hay không?

1. Xét khi M ≡ G, ở đây G là trọng tâm ΔABC



Khi đó $x = MA = \frac{2}{3}m_a$

$$y = MB = \frac{2}{3}m_b;\ \ z = MC = \frac{2}{3}m_c$$

$p = MP = \frac{1}{3}h_a$; $q = \frac{1}{3}h_b$; $r = \frac{1}{3}h_c$.

Lúc này $x + y + z \geq 2(p + q + r)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c) \geq \frac{2}{3}(h_a + h_b + h_c)$$

$$\Leftrightarrow m_a + m_b + m_c \geq h_a + h_b + h_c \quad (19)$$

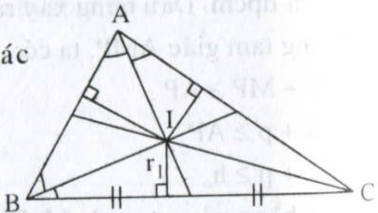
Rõ ràng (19) là đúng ⇒ đpcm.

2. Xét khi M ≡ I, ở đây I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

Khi đó $x = IA = \dfrac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}$, $y = IB = \dfrac{r_1}{\sin\frac{B}{2}}$, $z = IC = \dfrac{r_1}{\sin\frac{C}{2}}$

$p = q = r = r_1$,

ở đây r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác



Ta có: $x + y + z = r_1\left(\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$.

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geq \frac{9}{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} \geq \frac{9}{\frac{3}{2}} = 6$$

$$\left(\text{do } \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}\right)$$

Từ đó $x + y + z \geq 6r_1 \Rightarrow x + y + z \geq 2(p + q + r) \Rightarrow$ đpcm.

3. Xét khi M ≡ O, ở đây O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

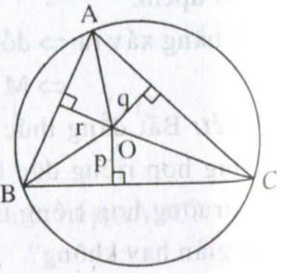
Ta có: $x = y = z = R$

$p = R\cos A$; $q = R\cos B$; $r = R\cos C$.

Vậy $2(p + q + r) = 2R(\cos A + \cos B + \cos C)$

$$\leq 2R.\frac{3}{2} = 3R$$

$\Rightarrow 2(p + q + r) \leq x + y + z \Rightarrow$ đpcm.



4. Xét khi m ≡ H, ở đây H là trực tâm tam giác nhọn ABC

Lúc này ta có: $x = HA = 2R\cos A$

$$y = HB = 2R\cos B$$

$$z = HC = 2R\cos C,$$

$p = HP = 2R\cos B\cos C$; $q = HQ = 2R\cos C\cos A$; $r = HR = 2R\cos A\cos B$.

Do $\cos A + \cos B + \cos C$

$\geq 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$

$\Rightarrow x + y + z \geq 2(p + q + r) \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Như vậy trong các trường hợp đặc biệt trên, việc chứng minh bất đẳng thức $x + y + z \geq 2(p + q + r)$ hiển nhiên là ngắn gọn (so với trường hợp tổng quát). Đó là điều bình thường và hợp lẽ tự nhiên.

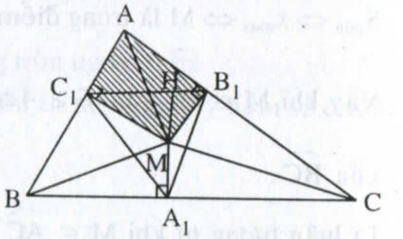
Bài 53. Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kì trong tam giác. Đặt MA = x, MB = y, MC = z. Kí hiệu p, q, r như trong bài 52. Chứng minh:

$$p + q + r \geq 2\left(\frac{qr}{x} + \frac{rp}{y} + \frac{pq}{z}\right).$$

Giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M xuống BC, CA, AB

Trong mọi trường hợp ($A \leq 90^0$ hoặc $A > 90^0$) trong tứ giác nội tiếp AC_1MB_2 (hoặc AB_1C_1M) ta đều có:



$B_1C_1 = MA\sin A$

(hoặc $B_1C_1 = MA\sin(\pi - A) = MA\sin A$)

$\Rightarrow B_1C_1 = MA\sin A = x\sin A$.

Tương tự $A_1C_1 = y\sin B$; $C_1A_1 = z\sin C$

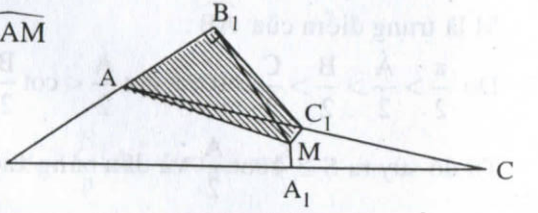
Trong $\Delta A_1B_1C_1$ ta có: $MA_1 = p$; $MB_1 = q$; $MC_1 = r$.

Kẻ $MH \perp B_1C_1$. Ta có:

$MH = MB_1\sin\widehat{HB_1M} = MB_1\sin\widehat{C_1AM}$

$$= MB_1\frac{MC_1}{MA}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{qr}{x}.$$



Tương tự khoảng cách từ M xuống A_1C_1 là $\dfrac{pr}{y}$ và từ M xuống A_1B_1 là $\dfrac{pq}{z}$.

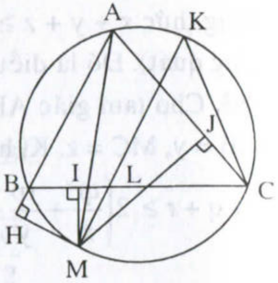
Áp dụng bất đẳng thức Paul Edos với $\Delta A_1B_1C_1$ ta có:

$$p + q + r \geq 2\left(\frac{qr}{x} + \frac{rp}{y} + \frac{pq}{z}\right) \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Bài 54. Cho tam giác ABC với a > b > c nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi x, y, z là khoảng cách từ một điểm M trên đường tròn ấy tới ba cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh: $S=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq 4\cot\frac{A}{2}$.

Giải

Gọi M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ và gọi H, I, J lần lượt là chân các đường vuông góc kẽ từ M xuống AB, BC, CA tương ứng. Giả sử K là điểm trên $\overset{\frown}{BAC}$ sao cho AB = KC (do các giả thiết a > b > c).



Giả sử MK ∩ BC = L

Vì ΔABM ∽ ΔACM $\Rightarrow\frac{b}{y}=\frac{BL}{x}$ (1)

Vì ΔCLM ∽ ΔABM $\Rightarrow\frac{c}{z}=\frac{CL}{x}$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{a}{x}+\frac{BL+CL}{x}=\frac{2a}{x}$.

Vậy trong trường hợp này ta có:

$S_{\min}\Leftrightarrow x_{\max}\Leftrightarrow$ M là trung điểm của BC $\Leftrightarrow\frac{a}{2x}=\cot\frac{A}{2}$

Vậy khi $M\in\overset{\frown}{BC}$, thì $S\geq 4\cot\frac{A}{2}$ và dấu bằng xảy ra ⇔ M là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$.

Lí luận tương tự khi $M\in\overset{\frown}{AC}\Rightarrow S\geq 4\cot\frac{B}{2}$ và dấu bằng xảy ra ⇔ M là trung điểm của $\overset{\frown}{AC}$, còn khi $M\in\overset{\frown}{AB}\Rightarrow S\geq 4\cot\frac{C}{2}$ và dấu bằng xảy ra ⇔ M là trung điểm của $\overset{\frown}{AB}$.

Do $\frac{\pi}{2}>\frac{A}{2}>\frac{B}{2}>\frac{C}{2}>0\Rightarrow\cot\frac{A}{2}<\cot\frac{B}{2}<\cot\frac{C}{2}>0$.

Từ đó suy ra $S\geq 4\cot\frac{A}{2}$ và dấu bằng xảy ra ⇔ M là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$.

Bài 55. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$\frac{m_am_bm_c}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}\geq r.$$

Giải

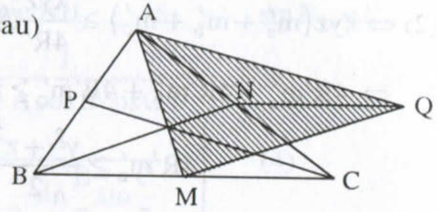
Ta cần đến hai bài toán phụ trợ sau:

Bài 1. Xét tam giác A'B'C' có ba cạnh là m_a, m_b, m_c. Gọi m'_a, m'_b, m'_c là ba đường trung tuyến của ΔA'B'C'. Khi đó ta có:

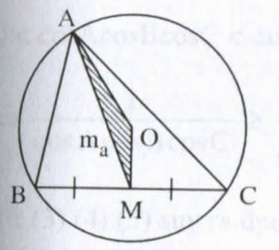
$$m'_a=\frac{3}{4}a,\ m'_b=\frac{3}{4}b,\ m'_c=\frac{3}{4}c,\ S_{A'B'C'}=\frac{3}{4}S.$$

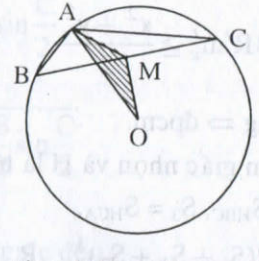
Giải

Chứng minh: hiển nhiên (qua hình vẽ sau) (NQ // BC; MQ // BN và ΔAMQ chính là tam giác nhận m_a, m_b, m_c là ba cạnh).



Bài 2. Trong mọi tam giác, ta có: $4m_aR\geq b^2+c^2$





Gọi M là trung điểm của BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp.

Trong mọi trường hợp ($A\leq 90^0$, $A>90^0$) ta đều có theo định lý hàm số cosin.

$$\cos\widehat{MAO}=\frac{AM^2+AO^2-MO^2}{2MA.AO}$$

$$=\frac{m_a^2-\left(R^2-\frac{BC^2}{4}\right)}{2MA.AO}=\frac{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}{2m_a.R}=\frac{b^2+c^2}{4m_aR}$$

$\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{4m_aR}\leq 1\Rightarrow 4m_aR\geq b^2+c^2$.

Trở lại bài toán đang xét:

Ta có: $\frac{m_am_bm_c}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}\geq r\Leftrightarrow m_am_bm_c\geq\frac{S}{p}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(a+b+c)m_am_bm_c\geq S\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$. (1)

Gọi A'B'C' là tam giác nhận m_a, m_b, m_c là ba cạnh và S' là diện tích của nó. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{4}{3}(m'_a+m'_b+m'_c)m_am_bm_c\geq\frac{4}{3}S'\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$

$$\Leftrightarrow (m'_a + m'_b + m'_c)m_a m_b m_c \geq 2S'(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2). \quad (2)$$

Chú ý rằng A'B'C' là tam giác có ba cạnh m_a, m_b, m_c và m'_a, m'_b, m'_c là ba trung tuyến của nó. Để cho đơn giản kí hiệu $x = m_a$, $y = m_b$, $z = m_c$ và gọi R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔA'B'C'. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow xyz(m'_a + m'_b + m'_c) \geq \frac{xyz}{4R'}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow 4R'm'_a + 4R'm'_b + 4R'm'_c \geq x^2 + y^2 + z^2. \quad (3)$$

Theo bài 2, ta có: $\begin{cases} 4R'm'_a \geq \dfrac{y^2 + z^2}{2} \\ 4R'm'_b \geq \dfrac{z^2 + x^2}{2} \\ 4R'm'_c \geq \dfrac{x^2 + y^2}{2} \end{cases}$

Từ đó suy ra (3) đúng ⇒ đpcm.

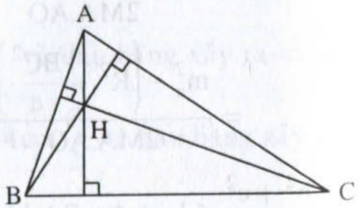
Bài 56. Cho ABC là tam giác nhọn và H là trực tâm.

Đặt $S_1 = S_{HAB}$, $S_2 = S_{HBC}$, $S_3 = S_{HCA}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{2(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} \geq \dfrac{R}{r}$

Giải

Ta có:



$$\frac{2(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} \geq \frac{R}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} \geq \frac{4R}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[(S_1 + S_2) + (S_2 + S_3) + (S_3 + S_1)\right]^3}{27S_1S_2S_3} \geq \frac{4R}{r}. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\left[(S_1 + S_2) + (S_2 + S_3) + (S_3 + S_1)\right]^3 \geq (S_1 + S_2) + (S_2 + S_3) + (S_3 + S_1)$$

Do vậy VT (1) $\geq \dfrac{(S_1 + S_2)}{S_1} + \dfrac{(S_2 + S_3)}{S_2} + \dfrac{(S_3 + S_1)}{S_3}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra ⇔ $S_1 = S_2 = S_3$ ⇔ ABC là tam giác đều.

Ta có:

$$\frac{(S_1 + S_2)}{S_1} = 1 + \frac{S_2}{S_1} = 1 + \frac{HB.HC.\sin\widehat{BHC}}{HA.HB.\sin\widehat{AHB}} = 1 + \frac{HC\sin A}{HA\sin C}$$

$$= 1 + \frac{2R\cos C\sin A}{2R\cos A\sin C} = \frac{\sin(A + C)}{\sin C\cos A} = \frac{\sin B}{\sin C\cos A}$$

Lập luận tương tự có: $\dfrac{(S_2 + S_3)}{S_2} = \dfrac{\sin C}{\sin A\cos B}$; $\dfrac{(S_3 + S_1)}{S_3} = \dfrac{\sin A}{\sin B\cos C}$

Từ đó thay vào (2) và có: VT (1) $\geq \dfrac{1}{\cos A\cos B\cos C}$ (3)

Lại có $\dfrac{4R}{r} = \dfrac{4R}{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$ (4)

Rõ ràng trong mọi tam giác nhọn ta có:

$$0 < \cos A\cos B\cos C < \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A\cos B\cos C} \geq \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad (5)$$

Từ (3) (4) (5) suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Để ý rằng $S_1 = S_{HAB} = 2R^2\cos A\cos B\sin C$; $S_2 = 2R^2\cos B\cos C\sin A$; $S_3 = 2R^2\cos C\cos A\sin B$

Từ đó: $\dfrac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} = \dfrac{8(2R^2\sin A\sin B\sin C)^3}{27(8R^6\sin A\sin B\sin C\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C)}$

$$= \frac{8}{27}(\tan A\tan B\tan C)^2$$

Vì thế từ bài trên ta có: $\dfrac{8}{27}(\tan A\tan B\tan C)^2 \geq \dfrac{4R}{r}$

$$\Rightarrow (\tan A\tan B\tan C)^2 \geq 27\frac{R}{2r}$$

Từ đó ta thấy: Trong mọi tam giác nhọn ABC, thì

$$\tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{R}{2r}} \geq 3\sqrt{3} \quad (6)$$

Như đã biết ta hay dùng bất đẳng thức: Trong mọi tam giác nhọn thì

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \quad (7)$$

Vậy (6) là một kết quả mạnh hơn (7).

C. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác thường

Trong mục này ta sẽ xét các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác thường mà chủ yếu dựa vào phép biến đổi lượng giác (hầu như không dùng đến hình vẽ). Đó là điều khác biệt so với mục trước.

1. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có các bất đẳng thức sau:

1. $\dfrac{l_a+l_b}{c}+\dfrac{l_b+l_c}{a}+\dfrac{l_c+l_a}{b}\le 3\sqrt{3}$.
2. $\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c}\le\dfrac{9R}{p}$.
3. $\dfrac{a^2}{r_a-r}+\dfrac{b^2}{r_b-r}+\dfrac{c^2}{r_c-r}\le 9R$.
4. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$.
5. $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.
6. $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\dfrac{7}{4}+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.
7. $\cos A+\cos B+\cos C\le\dfrac{2p-a}{2p+a}+\dfrac{2p-b}{2p+b}+\dfrac{2p-c}{2p+c}$.

Giải

1. Ta có: $\dfrac{l_a+l_b}{c}+\dfrac{l_b+l_c}{a}+\dfrac{l_c+l_a}{b}\le 3\sqrt{3}$ (1)

$$\Leftrightarrow l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+l_b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\le 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\cdot\frac{b+c}{bc}+\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}\cdot\frac{a+c}{ac}+\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}\cdot\frac{a+b}{ab}\le 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản, thì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

2. Ta có: $\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c}\le\dfrac{9R}{p}$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{2R\sin A}{p\tan\frac{A}{2}}+\frac{2R\sin B}{p\tan\frac{B}{2}}+\frac{2R\sin C}{p\tan\frac{C}{2}}\le\frac{9R}{p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}+\frac{4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\cos\frac{B}{2}+\frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cos\frac{C}{2}\le 9$$

$$\Leftrightarrow 2(1+\cos A)+2(1+\cos B)+2(1+\cos C)\le 9$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản, thì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

3. Ta có:

$$\frac{a^2}{r_a-r}=a\frac{2R\sin A}{p\tan\frac{A}{2}-(p-a)\tan\frac{A}{2}}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}=2R(1+\cos A).$$

Từ đó bằng lập luận tương tự suy ra:

$$\frac{a^2}{r_a-r}+\frac{b^2}{r_b-r}+\frac{c^2}{r_c-r}\le 9R \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2(1+\cos A)+2(1+\cos B)+2(1+\cos C)\le 9$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2} \qquad (2)$$

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

4. Ta có: $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$ (1)

$$\Leftrightarrow a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\le 3abc$$

$$\Leftrightarrow a.2bc\cos A+b.2ac\cos B+c.2ab\cos C\le 3abc$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}. \qquad (2)\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

5. Ta có: $a^2+b^2+c^2=4S(\cot A+\cot B+\cot C)$, nên

$$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2ab+2bc+2ca\ge 4\sqrt{3}S+a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow 4S\left(\frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)\ge 4\sqrt{3}S+4S(\cot A+\cot B+\cot C)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A}-\cot A\right)+\left(\frac{1}{\sin B}-\cot B\right)+\left(\frac{1}{\sin C}-\cot C\right)\ge\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}\ge\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản thì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

6. Ta có: $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \frac{7}{4}+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (1)

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \frac{7}{4} + \cos A + \cos B + \cos C - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \frac{3}{4} - \cos(B + C) - \cos(C + A) - \cos(A + B)$$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \le \frac{3}{4} \quad (2)$$

Ta có: $\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \le \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2$. (3)

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản thì $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$. (4)

Từ (3) (4) suy ra (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

7. Ta có:

$$\frac{2p-a}{2p+a}+\frac{2p-b}{2p+b}+\frac{2p-c}{2p+c}$$

$$=\frac{b+c}{(a+b)+(a+c)}+\frac{a+c}{(b+c)+(a+b)}+\frac{a+b}{(a+c)+(b+c)}. \qquad (1)$$

Như đã biết bất đẳng thức Nesbit sau:

Với $x > 0, y > 0, z > 0$ thì $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$.

Vì thế từ (1) suy ra $\frac{2p-a}{2p+a}+\frac{2p-b}{2p+b}+\frac{2p-c}{2p+c}\ge\frac{3}{2}$.

Mặt khác theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản thì

$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

Từ đó có: $\frac{2p-a}{2p+a}+\frac{2p-b}{2p+b}+\frac{2p-c}{2p+c}\ge \cos A + \cos B + \cos C$

⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác (trừ phần 6/ ABC không phải là tam giác vuông) ta có:

1. $\frac{h_a+h_b}{c}+\frac{h_b+h_c}{a}+\frac{h_c+h_a}{b}\le 3\sqrt{3}$.
2. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge\frac{7}{8}$.
3. $\sin A + \sin B + \sin C \ge \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$.
4. $p^2 \ge h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a$.
5. $a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{3S}{2r}$.
6. $3\tan^2A\tan^2B\tan^2C - 5(\tan^2A + \tan^2B + \tan^2C)$
$\le 9 + \tan^2B\tan^2C + \tan^2C\tan^2A + \tan^2A\tan^2B$.
7. $\cos^3A+\cos^3B+\cos^3C\le\frac{9}{8}+\frac{1}{4}(\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C)$.

Giải

1. Ta có: $\frac{h_a+h_b}{c}+\frac{h_b+h_c}{a}+\frac{h_c+h_a}{b}\le 3\sqrt{3}$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{2R\sin B\sin C+2R\sin C\sin A}{2R\sin C}+\frac{2R\sin A\sin C+2R\sin A\sin B}{2R\sin A}+\frac{2R\sin A\sin B+2R\sin B\sin C}{2R\sin B}\le 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sin A + \sin B) + (\sin B + \sin C) + (\sin A + \sin C) \le 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

Do (2) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Do $h_a \le l_a$; $h_b \le l_b$; $h_c \le l_c$

Vì thế bất đẳng thức trên có thể suy ra từ phần 1/ của bài 1.

Tuy nhiên cách chứng minh trên là cách chứng minh trực tiếp.

2. Ta có: $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge\frac{7}{8}$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}. \qquad (2)$$

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

3. Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ (1)

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \geq 4\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \geq 8\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \qquad (2)$$

(chú ý là $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} > 0$)

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

4. Ta có: $p^2 \geq h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a$ (1)

$$\Leftrightarrow p^2 \geq 4S^2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

$$\Leftrightarrow abcp^2 \geq 4\frac{abc}{4R}pr(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow R \geq 2r$$

$$\Leftrightarrow R \geq 8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}. \qquad (2)$$

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

6. Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau:

$$4\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C - 4(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) - 8$$
$$\leq \tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C + (\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C)$$
$$+ 1 + \tan^2 A\tan^2 B + \tan^2 B\tan^2 C + \tan^2 C\tan^2 A$$

$$\Leftrightarrow 4\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C - 4(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) - 8$$
$$\leq (1 + \tan^2 A)(1 + \tan^2 B)(1 + \tan^2 C)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2 A} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 B} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 C} - 1\right) - 4\left(\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C}\right)$$
$$\leq \frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C} - 4\left(\frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 B\cos^2 C} + \frac{1}{\cos^2 C\cos^2 A}\right)$$
$$\leq \frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C} \leq 4\frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 + B\cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

7. Ta có:

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \leq \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C$$
$$\leq \frac{9}{8} + \frac{1}{4}\left(4\cos^3 A - \cos 3A + 4\cos^3 B - \cos 3B + 4\cos^3 C - \cos 3C\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

1. $\dfrac{a^8}{\cos^2\frac{A}{2}} + \dfrac{b^8}{\cos^2\frac{B}{2}} + \dfrac{c^8}{\cos^2\frac{C}{2}} \leq \left(\dfrac{abc\sqrt{6}}{3R}\right)^4.$

2. $\dfrac{1}{1 + 2\sin A + 4\sin A\sin B} + \dfrac{1}{1 + 2\sin B + 4\sin B\sin C} + \dfrac{1}{1 + 2\sin C + 4\sin C\sin A} \geq \dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{13}.$

3. $\cot A + \cot B + \cot C \leq \dfrac{9}{8\sin A\sin B\sin C}.$

4. $\dfrac{h_a^2}{bc} + \dfrac{h_b^2}{ca} + \dfrac{h_c^2}{ab} \geq \dfrac{9r^2}{4S}.$

5. $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{9r^2}{4S}.$

6. $ab\sin\dfrac{C}{2} + bc\sin\dfrac{A}{2} + ca\sin\dfrac{B}{2} \geq 2S\sqrt{3}.$

7. $\dfrac{3}{2}\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{r_a\sin A} + \sqrt{r_b\sin B} + \sqrt{r_c\sin C}.$

8. $2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\le\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$.

Giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\frac{a^8}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{b^8}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{c^8}{\cos^2\frac{C}{2}}\ge\frac{(a^4+b^4+c^4)^2}{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}. \quad (1)$$

Rõ ràng trong mọi tam giác, ta có:

$$a^4+b^4+c^4\ge16S^2=\frac{a^2b^2c^2}{R^2} \quad (2)$$

Ta lại có: $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{2}\le\frac{9}{4}$ (3)

(do $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$).

Từ (1) (2) (3) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Nếu như $b_1>0$, $b_2>0$, $b_3>0$ thì theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3}\ge\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}.$$

2. (2) chứng minh như sau:

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$

Rõ ràng trong mọi tam giác ta có: $abc\ge(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$

Từ đó theo công thức Heron: $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$ suy ra (2)

2. Đặt vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là T. Khi đó theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$T[(1+2\sin A+4\sin A\sin B)+(1+2\sin B+4\sin B\sin C)$$
$$+(1+2\sin C+4\sin C\sin A)]\ge9$$

$$\Rightarrow T(3+2(\sin A+\sin B+\sin C)+4(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)]\ge9 \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác, ta có:

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{3}\le\frac{27}{12}. \quad (3)$$

Từ (2) (3) có:

$$3+2(\sin A+\sin B+\sin C)+4(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)\le3(4+\sqrt{3}) \quad (4)$$

Thay (4) vào (1) và có:

$$T\ge\frac{9}{3(4+\sqrt{3})} \text{ hay } T\ge\frac{3(4-\sqrt{3})}{13}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

3. Ta có:

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

$$=\frac{4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}{8R^2\sin A\sin B\sin C}=\frac{4(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}{8\sin A\sin B\sin C}$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4}.$$

Từ đó ta đi đến $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{9}{8\sin A\sin B\sin C}\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

4. Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\frac{h_a^2}{bc}+\frac{h_b^2}{ca}+\frac{h_c^2}{ab}\ge\frac{(h_a+h_b+h_c)^2}{bc+ca+ab} \quad (1)$$

Trong mọi tam giác ta có $h_a+h_b+h_c\ge9r$, (2)

$ab+bc+ca=4R^2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$

$\le4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$. (3)

Lại theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4}. \quad (4)$$

Thay (2) (3) (4) vào (1) và có: $\frac{h_a^2}{bc}+\frac{h_b^2}{ca}+\frac{h_c^2}{ab}\ge\frac{9r^2}{4S}\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. (2) chứng minh như sau:

Ta có: $(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\ge9$.

Mặt khác lại có: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{2p}{2pr}=\frac{1}{r}$.

Từ đó suy ra (2) đúng ⇒ đpcm.

2. Lại do $h_a=2R\sin B\sin C$, $h_b=2R\sin C\sin A$, $h_c=2R\sin A\sin B$

nên $\dfrac{h_a^2}{bc}+\dfrac{h_b^2}{ca}+\dfrac{h_c^2}{ab}=\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B$

$$\Rightarrow \frac{h_a^2}{bc}+\frac{h_b^2}{ca}+\frac{h_c^2}{ab}\le \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le \frac{9}{4}.$$

Vậy ta có bất đẳng thức kép sau:

Trong mọi ΔABC thì $\dfrac{9r^2}{4S}\le \dfrac{h_a^2}{bc}+\dfrac{h_b^2}{ca}+\dfrac{h_c^2}{ab}\le \dfrac{9}{4}$

5. Ta có: $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\le \dfrac{9r^2}{4S}$ (1)

$$\Leftrightarrow 8R^2\sin A\sin B\sin C\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\le 9R^2$$

$$\Leftrightarrow 8\sin A\tan\frac{A}{2}\sin B\sin C+8\sin B\tan\frac{B}{2}\sin C\sin A+8\sin C\tan\frac{C}{2}\sin A\sin B\le 9$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}\sin B\sin C+4\sin^2\frac{B}{2}\sin C\sin A+4\sin^2\frac{C}{2}\sin A\sin B\le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B\sin C(1-\cos A)+2\sin C\sin A(1-\cos B)+2\sin A\sin B(1-\cos C)\le \frac{9}{4}\quad(2)$$

Để ý rằng

$$2\sin B\sin C\cos A+2\sin C\sin A\cos B+2\sin A\sin B\cos C$$
$$=\sin C(\sin B\cos A+\sin A\cos B)+\sin B(\sin A\cos C+\sin C\cos A)$$
$$+\sin A(\sin B\cos C+\sin C\cos B)$$
$$=\sin^2 C+\sin^2 B+\sin^2 A.$$

Vậy

$$(2)\Leftrightarrow 2\sin B\sin C+2\sin C\sin A+2\sin A\sin B-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\le \frac{9}{4}\quad(3).$$

Dễ thấy VT (3) $\le 2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$

$$=(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\le \frac{9}{4}$$

(theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác).

Vậy (3) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

6. Ta có:

$$ab\sin\frac{C}{2}+bc\sin\frac{A}{2}+ca\sin\frac{B}{2}\ge 2S\sqrt{3}\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2S}{\sin C}\sin\frac{C}{2}+\frac{2S}{\sin A}\sin\frac{A}{2}+\frac{2S}{\sin B}\sin\frac{B}{2}\ge 2S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}\ge 2\sqrt{3}.\quad(2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\ge 9.\quad(3)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le \frac{3\sqrt{3}}{2}.\quad(4)$$

Từ (2) (3) (4) suy ra (1) đúng ⇒ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

7. $\dfrac{3}{2}\sqrt{a+b+c}\ge \sqrt{r_a\sin A}+\sqrt{r_b\sin B}+\sqrt{r_c\sin C}$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{2p}\ge \sqrt{p\tan\frac{A}{2}2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{p\tan\frac{B}{2}2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{p\tan\frac{C}{2}2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\ge \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.\quad(2)$$

Vì (2) đúng ⇒ dpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

8. Ta có:

$$2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\le \frac{2}{3}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2\quad(1)$$

Vì $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\le \dfrac{3}{2}$, nên từ (1) có:

$$2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\le \frac{2}{3}.\frac{3}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\le \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

2. Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức kinh điển

Trong mục này, ta sẽ sử dụng các bất đẳng thức kinh điển quen biết như bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Bunhiacopski, bất đẳng thức Trebưsép... để chứng minh các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{a}+\dfrac{\cos^2\frac{B}{2}}{b}+\dfrac{\cos^2\frac{C}{2}}{c}\ge\dfrac{27r}{8S}$.
2. $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}-\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\ge\frac{26}{27}$.
3. $1+\cos A\cos B\cos C\ge 9\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.
4. $1+\cos A\cos B\cos C\ge\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$.

Giải

1. Ta có:

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{a}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{b}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{c}\ge\frac{27r}{8S}\qquad(1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos A}{2a}+\frac{1+\cos B}{2b}+\frac{1+\cos C}{2c}\ge\frac{27r}{8.pr}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2bc(1+\cos A)+2ac(1+\cos B)+2ab(1+\cos C)}{4abc}\ge\frac{27}{4(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2bc+2ac+2ab+b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{abc}\ge\frac{27}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)^3}{27}\ge abc$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}.\qquad(2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

2. Ta có:

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 1.\qquad(1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$1=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\ge 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\le\frac{1}{27}.\qquad(2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Từ (1) (2) suy ra

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}-\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\ge\frac{26}{27}.$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

3. Ta có:

$$1+\cos A\cos B\cos C\ge 9\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\qquad(1)$$

$$\Leftrightarrow(1+\cos A\cos B\cos C)8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$\ge 9\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(1+\cos A\cos B\cos C)(\sin A+\sin B+\sin C)\ge 9\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)(\sin A+\sin B+\sin C)\ge 9\sin A\sin B\sin C\qquad(2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\begin{cases}\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\ge 3\sqrt[3]{\sin^2A\sin^2B\sin^2C)} & (3)\\ \sin A+\sin B+\sin C\ge 3\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C)} & (4)\end{cases}$$

Nhân từng vế (3) (4) suy ra (2) đúng, vậy (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

4. Đặt $x=\tan\frac{A}{2}$, $y=\tan\frac{B}{2}$, $z=\tan\frac{C}{2}$.

Khi đó ta có: $x>0$, $y>0$, $z>0$ và $xy+yz+zx=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\ge(xy+yz+zx)^2$$

$$\Rightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge\frac{1}{3}.\qquad(1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Côsi, lại có: $\frac{1}{3}=\frac{xy+yz+zx}{3}\ge\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$.

$$\Rightarrow xyz\le\frac{1}{3\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ 3\sqrt{3}xyz\le 1.\qquad(2)$$

Từ (1) có: $1+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge\frac{4}{3}$. (3)

Từ (2) có $\frac{4}{3} \geq 4\sqrt{3}xyz$. (4)

Vì thế từ (3) (4) đi đến

$$1 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 4\sqrt{3}\,xyz$$

$$\Rightarrow 2 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 \geq 8\sqrt{3}xyz$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) \geq 8\sqrt{3}xyz$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{1-y^2}{1+y^2}\frac{1-z^2}{1+z^2} \geq \sqrt{3}\frac{2x}{1+x^2}\frac{2y}{1+y^2}\frac{2z}{1+z^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \cos A\cos B\cos C \geq \sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

1. $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.
2. $\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2} \geq 24\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Giải

1. Do $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} > 0$, nên

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}\right)$$

$$\geq 8\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \geq 8\sin A\sin B\sin C. \quad (2)$$

Rõ ràng theo bất đẳng thức Cô si thì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

2. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{A-B}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{C-A}{2}} \quad (3)$$

Áp dụng phần 1/ ta có (sau khi kết hợp với (3))

$$\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2} \geq 3\sqrt[3]{64\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2} \geq 12\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} \quad (4)$$

Lại có $\left(\text{do} \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}\right)$

$$\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} \geq \sqrt[3]{8\sin^3\frac{A}{2}\sin^3\frac{B}{2}\sin^3\frac{C}{2}}. \quad (5)$$

Thay (5) vào (4) đi đến

$$\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2} \geq 24\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có bất đẳng thức sau:

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2$$

Giải

Ta có: $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos A}{2} + \frac{1+\cos B}{2} + \frac{1+\cos C}{2}$$

$$\geq \frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} + \frac{1-\cos C}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \geq 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \geq 2$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right) \geq 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sin A\tan\frac{B}{2} + \sin B\tan\frac{A}{2}\right) \geq 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}. \quad (3)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{2}\left(\sin A\tan\frac{C}{2}+\sin C\tan\frac{A}{2}\right)\geq 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin B\tan\frac{C}{2}+\sin C\tan\frac{B}{2}\right)\geq 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (5)$$

Từ (3) (4) (5) suy ra

$$\text{VP }(2)\leq\frac{1}{2}\tan\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)+\frac{1}{2}\tan\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)+\frac{1}{2}\tan\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)$$

$\Rightarrow$ VP (2)

$$\leq\tan\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\tan\frac{B}{2}\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\tan\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Rightarrow \text{VP }(2)\leq\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Rightarrow \text{VP }(2)\leq\frac{1}{2}(\cos B+\cos C)+\frac{1}{2}(\cos C+\cos A)+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)$$

$\Rightarrow$ VP(2) $\leq$ cosA + cosB + cosC = VT (2).

Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều..

Bài 4. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$S<\frac{1}{6}\left[r(r_a+r_b+r_c)+r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\right].$$

Giải

Ta có: $S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$

$\Rightarrow S^4 = p(p - a)(p - b)(p - c)\, r_ar_br_cr$

Lại có $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$

$\Rightarrow S = \sqrt{rr_ar_br_c}$. (1)

Từ (1) và theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$S=\sqrt{(rr_a)(r_br_c)}\leq\frac{rr_a+r_br_c}{2} \quad (2)$$

$$S=\sqrt{(rr_b)(r_cr_a)}\leq\frac{rr_b+r_cr_a}{2} \quad (3)$$

$$S=\sqrt{(rr_c)(r_ar_b)}\leq\frac{rr_c+r_ar_b}{2} \quad (4)$$

Cộng từng vế (2) (3) (4) và có

$$S\leq\frac{1}{6}\left[r(r_a+r_b+r_c)+r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\right] \quad (5)$$

Để có dấu bằng trong (5) thì phải có đồng thời dấu bằng trong (2), (3), (4), tức là ta phải có hệ sau:

$$\begin{cases} rr_a=r_br_c \\ rr_b=r_cr_a \\ rr_c=r_ar_b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} p(p-a)=(p-b)(p-c) \\ p(p-b)=(p-c)(p-a) \\ p(p-c)=(p-a)(p-b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (b+c-a)(b+c+a)=(a+c-b)(a+b-c) \\ (b+c+a)(a+c-b)=(a+b-c)(b+c-a) \\ (b+c+a)(a+b-c)=(b+c-a)(a+c-b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (b+c)^2-a^2=a^2-(b-c)^2 \\ (a+c)^2-b^2=b^2-(c-a)^2 \\ (a+b)^2-c^2=c^2-(a-b)^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ b^2=c^2+a^2 \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} A=90^0 \\ B=90^0 \\ C=90^0 \end{array}\right.$$

Do không thể có đồng thời A = B = C = 90^0, vậy trong (5) không thể có dấu bằng $\Rightarrow S<\frac{1}{6}\left[r(r_a+r_b+r_c)+r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\right]$. Đó là đpcm.

Bài 5. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$.

2. $\left(1+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$.

3. $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\geq 27$.

Giải

Ta có kết quả sau:

Bổ đề:

Nếu x > 0, y > 0, z > 0 và x + y + z $\leq$ S, thì ta có:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq\left(1+\frac{3}{S}\right)^2.$$

Bổ đề được chứng minh như sau:

Ta có:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz}. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, thì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}\geq\frac{9}{S}$. (2)

Lại theo bất đẳng thức Côsi, thì $S \geq x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

$$\Rightarrow \frac{1}{xyz} \geq \frac{27}{S^3}, \qquad (3)$$

và áp dụng bất đẳng thức Côsi, thì

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(xyz)^2}}. \qquad (4)$$

Từ (3) (4) suy ra $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{27}{S^2}$. (5)

Từ (1) (2) (3) (5) có: $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 1 + \frac{9}{S} + \frac{27}{S^2} + \frac{27}{S^3} = \left(1+\frac{3}{S}\right)^2$.

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{S}{3}$.

Bổ đề được chứng minh

1. Do $\sin A > 0, \sin B > 0, \sin C > 0$ và theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Áp dụng bổ đề suy ra

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1+\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2/3/ Chứng minh như 1/ với chú ý

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài 6. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sqrt{\sin\frac{C}{2}} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
2. $\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} \leq \frac{a+b+c}{9R}$.
3. $a\tan\frac{A}{2} + b\tan\frac{B}{2} + c\tan\frac{C}{2} \geq 6p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

4. $\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
5. $a^2\left(1-\sqrt{3}\cot A\right) + b^2\left(1-\sqrt{3}\cot B\right) + c^2\left(1-\sqrt{3}\cot C\right) \geq 0$.

Giải

1. Ta có:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sqrt{\sin\frac{C}{2}} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{27} \qquad (2)$$

Ta có:

$$\text{VT }(2) = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}$$

Do $\cos\frac{A-B}{2} \geq 0 \Rightarrow \left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)^2 \leq \left(1 - \sin\frac{C}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \text{VT}(2) \leq \frac{1}{4}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}. \qquad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 1 \Leftrightarrow A = B$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$2\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2} \leq \left[\frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}}{3}\right]^3 = \frac{8}{27}. \qquad (4)$$

Từ (3) (4) suy ra $\quad \text{VT }(2) \leq \frac{1}{27} \qquad (5)$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow 1 - \sin\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}$ và $A = B$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{3} \text{ và } A = B.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác cân đỉnh C với $C = 2\arcsin\frac{1}{3}$.

2. Ta có:

$a\cos A + b\cos B + c\cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

$= 4R\sin A\sin B\sin C. \qquad (1)$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$a\sin A + b\sin B + c\sin C \geq 3\sqrt[3]{abc\sin A\sin B\sin C}$

$$\Rightarrow a\sin A + b\sin B + c\sin C \geq 6R\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C} \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} \leq \frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Vẫn áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a+b+c}{9R} = \frac{2(\sin A + \sin B + \sin C)}{9} \geq \frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

Từ (3) (4) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

3. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$a\tan\frac{A}{2} + b\tan\frac{B}{2} + c\tan\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{abc\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}. \quad (1)$$

Ta lại có: $\dfrac{r}{p} = \dfrac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

$abc = 4RS = 4Rpr.$

Từ đó suy ra $\quad abc\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 4Rr^2. \quad (2)$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 2r \leq R \quad (3)$$

Từ (2) (3) đi đến $\quad abc\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \geq 8r^3 \quad (4)$

Từ (1) (4) suy ra $\quad a\tan\frac{A}{2} + b\tan\frac{B}{2} + c\tan\frac{C}{2} \geq 6r \quad (5)$

Do $p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = r$, nên thay vào (5) có:

$$a\tan\frac{A}{2} + b\tan\frac{B}{2} + c\tan\frac{C}{2} \geq 6p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

4. Theo định lý hàm số sin, thì

$$\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{2ab\sin C}{(a+b+c)^2} = \frac{S}{p^2}$$

Vì thế $\dfrac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{p^2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{S^2}{p^4} \leq \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3} \leq \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left[\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{3}\right]^3$$

$$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}$$

Vậy (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

5. Ta có:

$$a^2\left(1-\sqrt{3}\cot A\right) + b^2\left(1-\sqrt{3}\cot B\right) + c^2\left(1-\sqrt{3}\cot C\right) \geq 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A\left(1-\sqrt{3}\cot A\right) + \sin^2 B\left(1-\sqrt{3}\cot B\right) + \sin^2 C\left(1-\sqrt{3}\cot C\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 3\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{3\sin A\sin B\sin C}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}}. \quad (3)$$

Ta lại có: $\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \leq \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2.3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \quad (4)$

Từ (3) (4) suy ra

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{3.2}{\sqrt{3}}\sin A\sin B\sin C \leq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

Vậy (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 7. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

1. $l'_a + l'_b + l'_c \leq r_a^2 + r_b^2 + r_c^2$. 2. $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq p^2$.

Giải

1. Ta có:

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2=p^2\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\right). \qquad (1)$$

Do $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$,

nên từ (1) suy ra $\qquad r_a^2+r_b^2+r_c^2\ge p^2$. $\qquad (2)$

Lại có $l_a^2=\dfrac{4b^2c^2\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}=\dfrac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\dfrac{p(p-a)}{bc}=\dfrac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)\le p(p-a)$

(do $b+c\ge2\sqrt{bc}$).

Tương tự có: $l_b^2\le p(p-b)$; $l_c^2\le p(p-c)$

Từ đó đi đến $l_a^2+l_b^2+l_c^2\le p^2$. $\qquad (3)$

Từ (2) (3) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

2. Ta có:

$$l_ar_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\cdot\frac{S}{p-a}=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\cdot\frac{S}{p-a}.$$

Từ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, suy ra

$$l_ar_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}p\sqrt{(p-b)(p-c)}. \qquad (4)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\le1 \text{ và } \sqrt{(p-b)(p-c)}\le\frac{(p-b)+(p-c)}{2}=\frac{a}{2}.$$

Từ đó thay vào (4) và có: $l_ar_a\le\dfrac{pa}{2}$. $\qquad (5)$

Lập luận tương tự có: $l_br_b\le\dfrac{pb}{2}$, $\qquad (6)$

$$l_cr_c\le\frac{pc}{2}. \qquad (7)$$

Cộng từng vế (5) (6) (7) có: $l_ar_a+l_br_b+l_cr_c\le p^2\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 8. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có

1. $\dfrac{a}{h_a}+\dfrac{b}{h_b}+\dfrac{c}{h_c}\ge2\sqrt{3}$. $\qquad$ 2. $\dfrac{a}{l_a}+\dfrac{b}{l_b}+\dfrac{c}{l_c}\ge2\sqrt{3}$.

3. $\dfrac{a}{m_a}+\dfrac{b}{m_b}+\dfrac{c}{m_c}\ge2\sqrt{3}$.

Giải

1. Ta có:

$$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}=\frac{2R\sin A}{2R\sin B\sin C}+\frac{2R\sin B}{2R\sin C\sin A}+\frac{2R\sin C}{2R\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}+\frac{\sin B}{\sin C\sin A}+\frac{\sin A}{\sin A\sin B}$$

Từ đó theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\ge3\sqrt[3]{\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin^2A\sin^2B\sin^2C}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}} \qquad (1)$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}}\ge\frac{1}{\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}}=\frac{3}{\sin A+\sin B+\sin C} \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác, thì

$$\frac{3}{\sin A+\sin B+\sin C}\ge\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad (3)$$

Từ (1) (2) (3) đi đến $\dfrac{a}{h_a}+\dfrac{b}{h_b}+\dfrac{c}{h_c}\ge2\sqrt{3}\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

2. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a}{l_a}+\frac{b}{l_b}+\frac{c}{l_c}\ge3\sqrt[3]{\frac{abc}{l_al_bl_c}} \qquad (1)$$

Do $\dfrac{abc}{l_al_bl_c}=\dfrac{abc}{\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\cdot\dfrac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}\cdot\dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}}$

$$=\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{8(abc)^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$(a+b)\ge2\sqrt{ab}$, $(b+c)\ge2bc$, $(c+a)\ge2\sqrt{ac}$

$$\Rightarrow\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}\ge1 \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{8}{(\sqrt{3})^3} \qquad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) và có $\frac{a}{l_a} + \frac{b}{l_b} + \frac{c}{l_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{(\sqrt{3})^3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

3. Ta có: $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2$

$\Rightarrow (2m_a)^2 + (a\sqrt{3})^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, thì $(2m_a)^2 + (a\sqrt{3})^2 \geq 2(2m_a.a\sqrt{3})$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(2m_a.a\sqrt{3})$

$$\Rightarrow am_a \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{am_a} \geq \frac{2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{m_a} \geq \frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad (3)$$

Lập luận tương tự, có: $\frac{b}{m_b} \geq \frac{2\sqrt{3}b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ (4)

$$\frac{c}{m_c} \geq \frac{2\sqrt{3}c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (5)$$

Cộng từng vế (3) (4) (5) và có: $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$.

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bình luận:

Do $m_a \geq l_a \geq h_a$; $m_b \geq l_b \geq h_b$; $m_c \geq l_c \geq h_c$ nên

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq \frac{a}{l_a} + \frac{b}{l_b} + \frac{b}{l_c} \geq \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c}.$$

Vì thế thực chất ta chỉ cần chứng minh phần 4/ là suy ra phần 1/, phần 2/

Tuy nhiên ở đây chúng tôi muốn đưa ra cách chứng minh trực tiếp cho từng bất đẳng thức trên.

Bài 9. Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta có:

$$\frac{1}{(m_a + m_b - m_c)^2} + \frac{1}{(m_a + m_c - m_b)^2} + \frac{1}{(m_b + m_c - m_a)^2} \geq \frac{4}{3R^2}.$$

Giải

Gọi vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là T, khi đó theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$T \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(m_a + m_b - m_c)^2(m_a + m_c - m_b)^2(m_b + m_c - m_a)^2}}. \qquad (1)$$

Dễ thấy dấu bằng trong (1) xảy ra ⇔ $m_a = m_b = m_c$

⇔ ABC là tam giác đều.

Chú ý rằng m_a, m_b, m_c cũng là số do ba cạnh của một tam giác nào đó, nên ta có: $m_am_bm_c \geq (m_a + m_b - m_c)(m_a + m_c - m_b)(m_b + m_c - m_a)$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra ⇔ $m_a = m_b = m_c$

⇔ ABC là tam giác đều.

Từ (1) (2) suy ra $T \geq \frac{3}{\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2}}$. (3)

Và dĩ nhiên dấu bằng trong (3) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

Lại theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2} \leq \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \qquad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

Ta có: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq \frac{9}{4}R^2$

(theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác).

Dấu bằng trong (5) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Từ (1) (2) (3) (4) (5) suy ra $T \geq \frac{4}{3R^2} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

Chú ý: (2) dựa vào kết quả sau

Trong mọi tam giác ABC thì $abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$ (*)

(*) được chứng minh như sau:

Đặt $X = b + c - a > 0$; $Y = a + c - b > 0$, $Z = a + b - c > 0$.

Khi đó theo bất đẳng thức Côsi, thì

$(X + Y)(Y + Z)(Z + X) \geq 8XYZ$

Từ đó suy ra (*) đúng.

Bài 10. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$m_am_bm_c \geq Sp \geq l_al_bl_c \geq h_ah_bh_c$.

Giải

Ta có: $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq (b+c)^2 - a^2$

$$\Rightarrow 4m_a^2 \geq (b+c+a)(b+c-a) \Rightarrow m_a^2 \geq p(p-a)$$

$$\Rightarrow m_a \geq \sqrt{p(p-a)} \qquad (1)$$

Tương tự có $m_b \geq \sqrt{p(p-b)}$, $\qquad (2)$

$$m_c \geq \sqrt{p(p-c)}. \qquad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra $m_am_bm_c \geq p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = Sp \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Do $l_a \geq h_a$; $l_b \geq h_b$; $l_c \geq h_c \Rightarrow l_al_bl_c \geq h_ah_bh_c$.

Lại có:

$$l_al_bl_c = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

$$= \frac{8abc(8R^3\sin A\sin B\sin C)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{8R^3(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)(\sin A+\sin B)}$$

$$= \frac{abc}{4R}\frac{64R.8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}{16\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \quad (4)$$

Áp dụng các công thức $S = \frac{abc}{4R}$; $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, từ (4) có:

$$l_al_bl_c = \frac{8Sp\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}. \quad (5)$$

Rõ ràng trong mọi tam giác ABC, ta có (theo bài 2 phần 1/)

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Từ đó theo (5) suy ra $\quad l_al_bl_c \leq Sp$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Rõ ràng từ bài trên suy ra: Trong mọi tam giác ta có

$$h_ah_bh_c \leq Sp. \qquad (6)$$

Tuy nhiên (6) có thể chứng minh trực tiếp như sau:

Rõ ràng

$$h_ah_bh_c = (2R\sin B\sin C)(2R\sin C\sin A)(2R\sin A\sin B)$$

$$= (2R^2\sin A\sin B\sin C)(4R\sin A\sin B\sin C)$$

$$= S.4R.\,8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= S.p.8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (7)$$

Vì $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, nên từ (7) có: $h_ah_bh_c \leq Sp$.

Vậy (6) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 11. Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta có:

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

Lại có: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$,

nên lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}. \qquad (2)$$

Nhân từng vế (1) (2) suy ra

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right) \geq \frac{9}{2}\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}} \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Côsi lại có:

$$1 = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} \geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}. \qquad (4)$$

Từ (3) (4) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài 12. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\ge\frac{1}{9}$.

2. $\sin A+\sin B+\sin C\ge 2\sqrt{3}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$.

3. $\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\ge 2\sqrt{3}S$, ở đây p, q, r là ba số dương tùy ý.

Giải

1. Dễ dàng thấy rằng

$$\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\ge\tan^3\frac{A}{2}\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{B}{2}\tan^3\frac{C}{2}+\tan^3\frac{C}{2}\tan^3\frac{A}{2}\ (1)$$

Đặt $x=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2};\ y=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2};\ z=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2};$

$\Rightarrow x+y+z=1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với hai dãy sau:

$\sqrt{x},\ \sqrt{y},\ \sqrt{z}$

$\sqrt{x^3},\ \sqrt{y^3},\ \sqrt{z^3},$

ta có: $(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)\ge(x^2+y^2+z^2)^2$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3\ge(x^2+y^2+z^2)^2$ (2)

Hiển nhiên ta có: $x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}$. (3)

Từ (2) (3) suy ra $x^3+y^3+z^3\ge\frac{1}{9}$ (4)

Từ (1) (4) đi đến đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với hai dãy

$\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}},\ \sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}},\ \sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}},$

$\sqrt{\frac{1}{4}\sin A\sin B},\ \sqrt{\frac{1}{4}\sin B\sin C},\ \sqrt{\frac{1}{4}\sin C\sin A},$

ta có:

$$\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\sin A\sin B+\frac{1}{4}\sin B\sin C+\frac{1}{4}\sin C\sin A\right)$$
$$\ge\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$$
$$\ge\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)^2\quad(4)$$

Rõ ràng $(\sin A+\sin B+\sin C)^2\ge 3(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$ (5)

Từ (4) (5) suy ra:

$$(\sin A+\sin B+\sin C)^2\ge 12\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)^2\quad(6)$$

Do cả hai vế của (6) đều dương nên ta có:

$$\sin A+\sin B+\sin C\ge 2\sqrt{3}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

3. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với hai dãy

$\frac{a}{\sqrt{q+r}},\ \frac{b}{\sqrt{r+p}},\ \frac{c}{\sqrt{p+q}},$

$\sqrt{q+r},\ \sqrt{r+p},\ \sqrt{p+q},$

ta có: $\left(\frac{a^2}{q+r}+\frac{b^2}{r+p}+\frac{b^2}{p+q}\right)[(q+r)+(r+p)+(p+q)]\ge(a+b+c)^2$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2}{q+r}+\frac{b^2}{r+p}+\frac{b^2}{p+q}\right)(p+q+r)\ge\frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{pa^2}{q+r}+\frac{qb^2}{r+p}+\frac{rc^2}{p+q}+(a^2+b^2+c^2)\ge\frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\ge\frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)\right]\ (1).$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)\right]\ge 2\sqrt{3}S$. (2)

Thật vậy

$(2)\Leftrightarrow 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\ge 4\sqrt{3}S$

$\Leftrightarrow 4S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)\ge 4\sqrt{3}S+4S(\cot A+\cot B+\cot C)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sin A}-\cot A\right)+\left(\frac{1}{\sin B}-\cot B\right)+\left(\frac{1}{\sin C}-\cot C\right)\ge\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$. (3)

Vì (3) đúng ⇒ (2) đúng. Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 13. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $h_a+h_b+h_c\le p\sqrt{3}$.

2. $\dfrac{a}{h_b+h_c}+\dfrac{b}{h_c+h_a}+\dfrac{c}{h_a+h_b}\le\dfrac{R\sqrt{3}}{2r}$.

Giải

1. Ta có:

$$h_a+h_b+h_c=2R(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A). \qquad (1)$$

Rõ ràng ta có:

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{3}. \qquad (2)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad (3)$$

Từ (1) (2) (3) có:

$$h_a+h_b+h_c\le\sqrt{3}R(\sin A+\sin B+\sin C)=p\sqrt{3}$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ABC là tam giác đều.

2. Do vai trò của a, b, c là như nhau, nên không giảm tổng quát có thể cho là

$$a\le b\le c \qquad (1)$$

$$\Rightarrow h_a\ge h_b\ge h_c$$

$$\Rightarrow h_b+h_c\le h_c+h_a\le h_a+h_b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_b+h_c}\ge\frac{1}{h_c+h_a}\ge\frac{1}{h_a+h_b} \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Trêbosep với hai dãy (1), (2) ta có:

$$\frac{a}{h_b+h_c}+\frac{b}{h_c+h_a}+\frac{c}{h_a+h_b}\le\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{a}{h_b+h_c}+\frac{b}{h_c+h_a}+\frac{c}{h_a+h_b}\right) \quad (3)$$

Ta có: $a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)\le3\sqrt{3}R$ (4)

$$\left(\text{do } \sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Lại do $h_a\ge h_b\ge h_c$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_b+h_c}+\frac{1}{h_c+h_a}+\frac{1}{h_a+h_b}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=\frac{1}{2r} \qquad (5)$$

Từ (3) (4) (5) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 14. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\ge\frac{1}{2\left(\tan^4\frac{A}{2}+\tan^4\frac{B}{2}+\tan^4\frac{C}{2}\right)}$$

Giải

Ta có mệnh đề phụ trợ sau:

Bổ đề: Nếu a_1, a_2, a_3 là các số dương thì

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_1}+\frac{a_3}{a_1+a_2}\ge\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}.$$

Áp dụng bổ đề với:

$$a_1=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2};\ a_2=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2};\ a_3=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

Rõ ràng $a_1+a_2+a_3=1$, khi đó ta có:

$$\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}$$

$$\ge\frac{1}{2\left(\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right)}. \qquad (1)$$

Mặt khác lại có:

$$\tan^4\frac{A}{2}+\tan^4\frac{B}{2}+\tan^4\frac{C}{2}\ge\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C+A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}. \qquad (3)$$

Bây giờ từ (1) (2) (3) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Chú ý:

1. Chứng minh bổ đề dựa vào bất đẳng thức Bunhiacopski bằng cách xét với hai dãy sau:

$$\sqrt{\frac{a_1}{a_2+a_3}},\ \sqrt{\frac{a_2}{a_3+a_1}},\ \sqrt{\frac{a_3}{a_1+a_2}}$$

$$\sqrt{a_1(a_2+a_3)},\ \sqrt{a_2(a_3+a_1)},\ \sqrt{a_3(a_1+a_2)}.$$

2. Ta có kết quả tương tự sau: Trong tam giác nhọn thì

$$\frac{\cot A\cot B}{\cot C}+\frac{\cot B\cot C}{\cot A}+\frac{\cot C\cot A}{\cot B}\geq\frac{1}{2(\cot^4 A+\cot^4 B+\cot^4 C)}.$$

Bài 15. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}\geq\dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}.$

2. $2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\leq\cos A+\cos B+\cos C.$

3. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}.$

Giải

1. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\geq\frac{2}{\sin A\sin B}.\qquad(1)$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\frac{2}{\sin A\sin B}\geq\frac{2}{\left(\frac{\sin A\sin B}{2}\right)^2}=\frac{8}{(\sin A+\sin B)^2}.\qquad(2)$$

Ta lại có:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leq2\cos\frac{C}{2}\qquad(3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\geq\frac{2}{\cos^2\frac{C}{2}}.\qquad(4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra ⇔ A = B.

Tương tự có: $\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}\geq\dfrac{2}{\cos^2\frac{A}{2}}\qquad(5)$

$$\frac{1}{\sin^2 C}+\frac{1}{\sin^2 A}\geq\frac{2}{\cos^2\frac{B}{2}}.\qquad(6)$$

Dấu bằng trong (5), (6) xảy ra tương ứng khi B = C, C = A.

Từ (4) (5) (6) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

2. Phần này đã chứng minh trong bài 3.

3. Ta có:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}\qquad(1)$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4R}$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$

$$\left(\text{do }\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C-1)\leq\frac{5}{8}\ (2)$$

Theo phần 2/ ta có:

$$\mathrm{VT}(2)\leq\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)-\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$

$$\Rightarrow\mathrm{VT}(2)\ \frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C)+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\left(\text{do }\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\mathrm{VT}(2)\leq\frac{5}{8}.$$

Vậy (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

3. Phương pháp sử dụng phép biến đổi lượng giác

Trong mục này công cụ chủ yếu để chứng minh các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác là sử dụng chủ yếu các phép biến đổi lượng giác sơ cấp, mà ít dùng đến các công cụ mạnh hơn.

Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta có:

1. $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2.$

2. $\dfrac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}<2.$

Giải

1. Trong mọi tam giác ta có:

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}>0.$$

Vì $\sin C\le 1 \Rightarrow \sin C(\cos A+\cos B)\le \cos A+\cos B$. (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow C=90^0$.

Lập luận tương tự có: $\sin A(\cos B+\cos C)\le \cos B+\cos C$, (2)

$\sin B(\cos C+\cos A)\le \cos C+\cos A$. (3)

Dấu bằng trong (2), (3) tương ứng xảy ra khi $A=90^0$; $B=90^0$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) và để ý rằng không thể đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3), nên có:

$$(\sin C\cos A+\sin A\cos C)+(\sin C\cos B+\sin B\cos C)+(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$$
$$<2(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(C+A)+\sin(C+B)+\sin(A+B)}{\cos A+\cos B+\cos C}<2$$

$$\left(\text{do}\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2\Rightarrow \text{đpcm}.$$

2. Giải hoàn toàn tương tự như phần 1.

Bài 2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có

1. $\cos A\cos B\cos C\le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

2. $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\cot A+\cot B+\cot C}\right)^3\le\frac{a^2b^2c^2}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$.

3. $(1+b+c-bc)\cos A+(1+c+a-ca)\cos B+(1+a+b-ab)\cos C\le 3$.

Giải

1. • Nếu ABC là tam giác có góc tù hoặc góc vuông thì $VT\le 0$, còn $VP>0$, vậy bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

• Nếu ABC là tam giác nhọn. Ta có

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos C\right].$$

Từ đó suy ra $\cos A\cos B\le\frac{1}{2}(1-\cos C)=\sin^2\frac{C}{2}$. (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow A=B$.

Tương tự có: $\cos B\cos C\le\sin^2\frac{A}{2}$, (2)

$\cos C\cos A\le\sin^2\frac{B}{2}$. (3)

Dấu bằng trong (2), (3) xảy ra tương ứng khi $B=C$; $C=A$.

Do ABC là tam giác nhọn nên $\cos A>0$, $\cos B>0$, $\cos C>0$; vì thế nhân từng vế (1) (2) (3) và có: $\cos A\cos B\cos C\le\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều

Nhận xét: Ta cho một minh họa hình học đẹp mắt cho bài toán trên.

Giả sử ABC là tam giác nhọn.

Dĩ nhiên theo bài trên ta có:

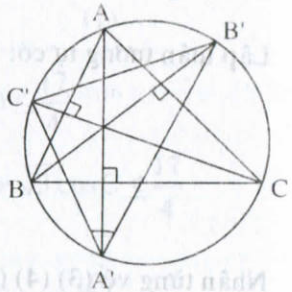
$\cos A\cos B\cos C\le\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. (*)

Khi đó nếu gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC, thì:

$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, (**)

ở đây R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Ba chiều cao kẻ từ A, B, C của ΔABC tương ứng cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A′, B′, C′. Khi đó nếu gọi r′ là bán kính đường tròn nội tiếp ΔA′B′C′. Ta có:



$r'=4R\sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2}$, ở đây chú ý rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔA′B′C′ cũng là R.

Ta có: $A'=\overset{\frown}{AA'B'}+\overset{\frown}{AA'C'}=\overset{\frown}{ABB'}+\overset{\frown}{ACC'}$

$=90^0-A+90^0-A=180^0-2A$

$$\Rightarrow\frac{A'}{2}=90^0-A\Rightarrow\sin\frac{A'}{2}=\cos A$$

Tương tự $\sin\frac{B'}{2}=\cos B$; $\sin\frac{C'}{2}=\cos C$

$\Rightarrow r'=4R\cos A\cos B\cos C$ (***)

Từ (*) (**) (***) suy ra (*) $\Leftrightarrow r'\le r$

Đó chính là minh họa hình học cho bất đẳng thức trên (đối với trường hợp ABC là tam giác nhọn).

2. Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$, nên

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\cot A+\cot B+\cot C}\right)^3 \le \frac{a^2b^2c^2}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 64S^3 \le \frac{a^2b^2c^2}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}. \qquad (2)$$

Theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ge 2bc - 2bc\cos A = 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\tan\frac{A}{2}} \ge \frac{4bc\sin^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{A}{2}} = 4bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 4S$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\tan\frac{A}{2}} \ge 4S. \qquad (3)$$

Lập luận tương tự có: $\frac{b^2}{\tan\frac{B}{2}} \ge 4S$, (4)

$$\frac{c^2}{\tan\frac{C}{2}} \ge 4S. \qquad (5)$$

Nhân từng vế (3) (4) (5) suy ra (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

3. Đặt S là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Ta có:

$$S = (\cos A + \cos B + \cos C) + [(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C] - (abc\cos C + bc\cos A + ca\cos B).$$

Đặt $P = \cos A + \cos B + \cos C$

$Q = (b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$

$R = ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B.$

Khi đó $S = P + Q - R.$ (1)

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì $P \le \frac{3}{2}$.

Ta có:

$$Q = 2R(\sin C + \sin A)\cos B + 2R(\sin A + \sin B)\cos C + 2R(\sin B + \sin C)\cos A$$
$$= 2R\sin(A + B) + 2R\sin(B + C) + 2R\sin(C + A) = a + b + c.$$

$$R = \frac{(a^2+b^2+c^2)+(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2+c^2)}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } S \le \frac{3}{2} + (a+b+c) - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$\Rightarrow S \le \frac{3-\left[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]}{2} \le 3.$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều cạnh bằng 1.

Bài 3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) \le \frac{17}{4}.$$

Giải

Theo định lí hàm số cosin và định lí hàm số sin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{\sin^2 B\sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

Vì thế

$$2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) \le \frac{17}{4} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) \le \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \cos^2 B - \cos^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}\sin A + \sqrt{3}\cos B + \sqrt{3}\cos C \le \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \ge 0. \qquad (2)$$

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C = 30^0 \\ A = 120^0 \end{cases}$$

⇔ ABC là tam giác cân đỉnh A với góc ở đỉnh $= 120^0$.

Bài 4. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

$$\tan\frac{A}{2}\left(1+\cos\frac{A}{2}\right) + \tan\frac{B}{2}\left(1+\cos\frac{B}{2}\right) + \tan\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right) \ge \frac{p(R+r)+R(4R+r)}{pR}.$$

Giải

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)+\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\ge 1+\frac{r}{R}+\frac{4R+r}{p}.\quad(1)$$

Theo các bài trên hiển nhiên ta có:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\ge \cos A+\cos B+\cos C.\qquad(2)$$

Lại có $\cos A\cos B\cos C = 1+4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=1+\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}=1+\frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge 1+\frac{r}{R}.$$

Theo phần đẳng thức trong tam giác, ta có:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}.$$

Vậy (1) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 5. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

$$3(\cos A+\cos B+\cos C)\ge 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A).$$

Giải

Ta có:

$$3(\cos A+\cos B+\cos C)\ge 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)\qquad(1)$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$\ge \cos(A-B)-\cos(A+B)+\cos(B-C)-\cos(B+C)+\cos(C-A)-\cos(C+A)$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos A+\cos B+\cos C)\ge \cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)$$

$$\Leftrightarrow [(\cos A+\cos B-\cos(A-B)]+[\cos B+\cos C-\cos(B-C)]$$
$$+[\cos C+\cos A-\cos(C-A)]\ge 0.\quad(2)$$

Ta có: $\cos A+\cos B-\cos(A-B)=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A-B}{2}+1$

$$=1+2\cos\frac{A-B}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]$$

$$=1-4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Từ đó suy ra $\cos A+\cos B-\cos(A-B)\ge 1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$ (3).

Dấu bằng trong (3) xảy ra ⇔ A = B.

Lập luận tương tự, ta có:

$$\cos B+\cos C-\cos(B-C)\ge 1-4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\qquad(4)$$

$$\cos C+\cos A-\cos(C-A)\ge 1-4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}.\qquad(5)$$

Dấu bằng trong (4), (5) tương ứng xảy ra ⇔ B = C; C = A.

Từ (3) (4) (5) suy ra

$$\text{VT (2)}\ge 3-4\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right).\qquad(6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

Theo phần 2/ Phương pháp sử dụng bất đẳng thức kinh điển (bài 15) ta có:

$$2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\le \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}\ (7).$$

Từ (6) (7) suy ra VT (2) ≥ 0. Vậy (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 6. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC và với mọi số x, y, z > 0, ta có:

$$\frac{1}{x}\cos A+\frac{1}{y}\cos B+\frac{1}{z}\cos C\le\frac{x}{2yz}+\frac{y}{2zx}+\frac{z}{2xy}.$$

Giải

Ta có: $\frac{1}{x}\cos A+\frac{1}{y}\cos B+\frac{1}{z}\cos C\le\frac{x}{2yz}+\frac{y}{2zx}+\frac{z}{2xy}$ (1)

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2yz\cos A-2xz\cos B-2xy\cos C\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(\cos^2B+\sin^2B)+y^2(\cos^2A+\sin^2A)$$
$$+z^2-2yz\cos A-2xz\cos B+2xy\cos(A+B)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2\cos^2B+y^2\cos^2A+2xy\cos A\cos B)+z^2-2z(y\cos A+x\cos B)$$
$$+(x^2\sin^2B+y^2\sin^2A-2xy\sin A\sin B)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x\cos B+y\cos A)^2+z^2-2z(x\cos B+y\cos A)+(x\sin B-y\sin A)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x\cos B+y\cos A-z)^2+(x\sin B-y\sin A)^2\ge 0.\qquad(2)$$

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x\cos B+y\cos A-z=0 & (3)\\ x\sin B-y\sin A=0 & (4)\end{cases}$

Từ (4) có: $y=\frac{x\sin B}{\sin A}$ (5)

Thay vào (3) và có: $x\cos B+\frac{x\sin B\cos A}{\sin A}-z=0$

$x(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=z\sin A$

$$x\sin(A+B) = z\sin A \Rightarrow z = \frac{x\sin C}{\sin A}. \quad (6)$$

Từ (5) (6) suy ra $x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

Vậy dấu bằng xảy ra ⇔ tam giác có ba cạnh x, y, z đồng dạng với tam giác ABC.

4. Vài phương pháp khác chứng minh bất đẳng thức lượng giác

Trong mục này ta xét một số phương pháp đặc biệt để chứng minh các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác. Các phương pháp hay dùng đến là:

- Phương pháp tam thức bậc hai
- Phương pháp sử dụng tính chất nghiệm của phương trình đại số
- Phương pháp vectơ
- Phương pháp chiều biến thiên hàm số.

Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta có:

$p^2 + r^2 + 4Rr \le a^2 + b^2 + c^2$.

Giải

Từ $p - a = r\cot\frac{A}{2}$ và $a = 2R\sin A$, suy ra $\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \sin A = \frac{a}{2R}$.

Mặt khác ta có: $\sin A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$.

Từ đó đi đến $\dfrac{a}{2R} = \dfrac{2\dfrac{r}{p-a}}{1+\dfrac{r^2}{(p-a)^2}} \Rightarrow \dfrac{a}{2R} = \dfrac{2r(p-a)}{(p-a)^2+r^2}$

$$\Rightarrow a^3 - 2pa^2 + a(p^2+r^2+4Rr) - 4Rp = 0. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra a là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + x(p^2+r^2+4Rr) - 4Rp = 0. \quad (2)$$

Tương tự b, c cũng là các nghiệm của (2)

Do vậy áp dụng định lí Viet với (2), ta có:

$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$ (3)

Rõ ràng $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \ge p^2 + r^2 + 4Rr$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 4p^2 - 2(p^2+r^2+4Rr) \quad \text{(theo (3))} \\ &= 2p^2 - 2r^2 - 8Rr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó (4)} &\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \le 2p^2 - 2r^2 - 8Rr \\ &\Leftrightarrow 3r^2 + 12Rr \le p^2 \\ &\Leftrightarrow 3r(4R + r) \le p^2 \\ &\Leftrightarrow 12R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.4\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \\ &\qquad \le 16R^2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} \\ &\Leftrightarrow 3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \le \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}. \quad (5) \end{aligned}$$

Vậy (5) là dạng tương ứng với bất đẳng thức đã cho. Tuy nhiên dưới dạng này chắc chắn đó là một bất đẳng thức không dễ chứng minh.

Bài 2. (Ứng dụng tích vô hướng để chứng minh các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác)

1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

   $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn, ta có:

   $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$

3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

   a. $\sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B \le \frac{5}{2}$.

   b. $\sqrt{3}\cos 2A + 2\cos 2B + 2\sqrt{3}\cos 2C \ge -4$.

   c. $(\sqrt{5}+1)(\cos 2A + \cos 2B) - (3+\sqrt{5})\cos 2C \le 4 + \sqrt{5}$.

Giải

1. Lấy các vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ như hình vẽ và có độ dài là 1, tức $|\vec{e}_i| = 1, \forall i = 1, 2, 3$

Hiển nhiên ta có:

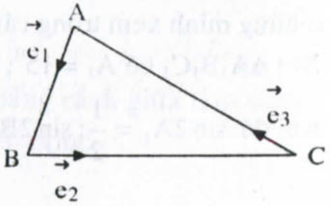
$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 2\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + 2\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \ge 0$

$\Leftrightarrow 3 - 2\cos B - 2\cos A - 2\cos C \ge 0$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Đó là đpcm.

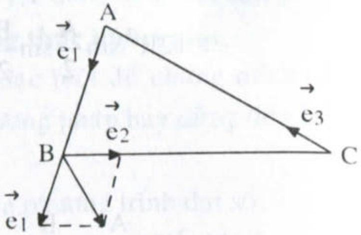


Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều (xem hình vẽ bên)

Nhận xét:

Đây là cách giải khác để chứng minh bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác.



$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

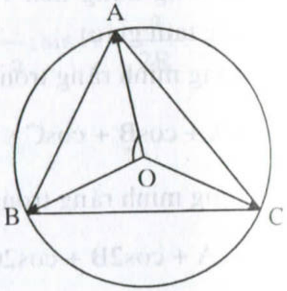
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Ta có: $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2\left(\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2(\cos 2C + \cos 2B + \cos 2A) \ge 0$

$\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$.



Đó là đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow H \equiv 0 \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều

(ở đây H là trực tâm ΔABC).

3.

a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Ta có: $\left(\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow 5R^2 + 2R^2\left[\sqrt{3}\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) - \sqrt{3}\cos\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) - \sqrt{3}\cos\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)\right] \ge 0$

$\Leftrightarrow 5R^2 + 2R^2\left[\sqrt{3}\cos 2C - \sqrt{3}\cos 2A - \cos 2B\right] \ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B \le \frac{5}{2}$.

Đó là đpcm. Để phát hiện ra khi nào dấu bằng xảy ra dùng bổ đề sau đây:

Bổ đề: Điều kiện cần và đủ để O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$\overrightarrow{OA}\sin 2A + \overrightarrow{OB}\sin 2B + \vec{O}\sin 2C = 0$

(chứng minh xem trong các tài liệu hình học 10 chương vectơ)

Xét $\Delta A_1B_1C_1$ có $A_1 = 15^0$; $B_1 = 60^0$; $C_1 = 105^0$.

Khi đó $\sin 2A_1 = \frac{1}{2}$; $\sin 2B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 2C_1 = \sin 210^0 = -\frac{1}{2}$

Vậy ta có: $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC_1} = 0$ hay $\overrightarrow{OA_1} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OC_1} = 0$.

Dựa vào bổ đề trên dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = 15^0$; $B = 60^0$; $C = 105^0$.

b/c/ Chứng minh tương tự như phần a/.

Dấu bằng trong b/ xảy ra $\Leftrightarrow A = 45^0$; $B = 60^0$; $C = 75^0$.

Dấu bằng trong c/ xảy ra $\Leftrightarrow A = B = 36^0$; $C = 108^0$.

Bài 3. (ứng dụng tam thức bậc hai)

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

1. $a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-c)(p-a) + c^2(p-a)(p-b) \le p^2R^2$
2. $p^2 \ge ab\sin^2 A + bc\sin^2 B + ca\sin^2 C$.

Giải

1. Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau:

$$(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c}\right) \le (p-a+p-b+p-c)^2R^2 \ (1).$$

Đặt $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$. Khi đó $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Lúc này

(1) $\Leftrightarrow a^2yz + b^2zx + c^2xy \le (x+y+z)^2R^2$. (2)

Theo định lí hàm số sin, thì

(2) $\Leftrightarrow 4yz\sin^2 A + 4zx\sin^2 B + 4xy\sin^2 C \le (x+y+z)^2$

$\Leftrightarrow 4yz\sin^2 A + 4zx\sin^2 B + 4xy\sin^2 C \le x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x(y - 2y\sin^2 C + z - 2z\sin^2 B) + 2yz - 4yz\sin^2 A + y^2 + z^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x(y\cos 2C + z\cos 2B) + 2yz\cos 2A + y^2 + z^2 \ge 0$ (3).

Quan niệm vế trái của (3) là tam thức bậc hai của x.

Ta có hệ số của x^2 là $1 > 0$, còn

$\Delta' = (y\cos 2C + z\cos 2B)^2 - y^2 - z^2 - 2yz\cos 2A$

$= y^2(\cos^2 2C - 1) + z^2(\cos^2 2B - 1) + 2yz\cos 2C\cos 2B - 2yz\cos 2A$

$= -y^2\sin^2 2C - z^2\sin 2B + 2yz(\cos 2C\cos 2B - \cos 2A)$

$= -y^2\sin 2C - z^2\sin 2B + 2yz[\cos 2C\cos 2B - \cos(2B + 2C)]$

$= -y^2\sin 2C - z^2\sin 2B + 2yz\sin 2B\sin 2C$

$= -(y\sin 2C - z\sin 2B)^2 \le 0$.

Theo định lí về dấu tam thức bậc hai suy ra (3) đúng $\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

2. Chứng minh tương tự như phần 1/.

Bài 4. Cho tam giác ABC với $A > B > C$. Gọi d là khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác. Chứng minh rằng:

$2R\cos A < R - d < 2R\cos B < R + d < 2R\cos C$.

Giải

Theo công thức Euler ta có: $R^2 - d^2 = 2Rr$ (1)

Từ (1) và theo định lí Viet suy ra R – a, R + d là hai nghiệm của phương trình

$f(x) = x^2 - 2Rx + R^2 - d^2 = 0.$ (2)

Rõ ràng từ (1), ta có:

$(2) \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2Rx + 2Rr = 0.$ (3)

Ta có: $f(2R\cos A) = 2R(2R\cos^2 A - 2R\cos A + r)$

$$= 2R^2\left(2\cos^2 A - 2\cos A + \frac{r}{R}\right)$$

$$= 2R^2\left(2\cos^2 A - 2\cos A + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2R^2\left(\cos 2A - 2\cos A + 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2R^2(\cos 2A - \cos A + \cos B + \cos C)$$

$\left(\text{do } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

$$= 2R^2\left(2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$= 4R^2\sin\frac{A}{2}\cos\left(B - \frac{C}{2}\right)\cos\left(C - \frac{B}{2}\right)$$

Vì $A > B > C \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{C}{2} < B - \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < -\frac{B}{2} < C - \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(B - \frac{C}{2}\right) > 0;\ \cos\left(C - \frac{B}{2}\right) > 0$

Vậy $f(2R\cos A) > 0$.

Tương tự $f(2R\cos C) > 0$; $f(2R\cos B) < 0$.

Từ $f(2R\cos B) < 0$, nên theo định lí về dấu của tam thức bậc hai ta có:

$R - d < 2R\cos B < R + d.$

Do $A > C \Rightarrow \cos A < \cos C \Rightarrow 2R\cos A < 2R\cos C$

Do $A > B > C$

$\Rightarrow 2R\cos A < 2R\cos B < 2R\cos C$ mà $f(2R\cos A) > 0$; $f(2R\cos C) > 0$, nên và theo định lí về dấu tam thức bậc hai ta có:

$2R\cos A < R - d < 2R\cos B < R + d < 2R\cos C$

Đó là đpcm.

Bài 5. Cho tam giác ABC có một góc $\geq \frac{2\pi}{3}$. Chứng minh:

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq 4 - \sqrt{3}.$$

Giải

Giả sử $A \geq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{A}{2} \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \dfrac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \dfrac{\sin\frac{B+C}{2}}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right]}$

$$\Rightarrow \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{B+C}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos^2\frac{B+C}{4}} = 2\tan\frac{B+C}{4}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \tan\frac{A}{2} + 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right) \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow B = C$.

Xét hàm số $f(x) = \tan\frac{x}{2} + 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right)$ với $\frac{2\pi}{3} \leq x < \pi$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right)} = \dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) - \cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right)} > 0.$

Vậy f(x) là hàm đồng biến trên $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$.

Từ đó suy ra:

$$\tan\frac{A}{2} + 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right) = f(A) \geq f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} + 2\tan\frac{\pi}{12} = 4 - \sqrt{3} \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = \frac{2\pi}{3}$; $B = C = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$ ABC là tam giác cân đỉnh A với góc ở đỉnh bằng $\frac{2\pi}{3}$.

Bài 6. Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta có:

$$\cot A + \cot B + \cot C + 3\sqrt{3} \le 2\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right).$$

Giải

$$\cot A + \cot B + \cot C + 3\sqrt{3} \le 2\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cot A - \frac{2}{\sin A}\right) + \left(\cot B - \frac{2}{\sin B}\right) + \left(\cot C - \frac{2}{\sin C}\right) \le -3\sqrt{3} \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \cot x - \frac{2}{\sin x}$ với $0 < x < \pi$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}.$$

Từ đó có bảng xét dấu sau:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f′(x)	‖	+	0	−	‖
f(x)	‖	↗	$-\sqrt{3}$	↘	‖

Từ bảng biến thiên ta có:
$$\begin{cases} f(A) = \cot A - \frac{2}{\sin A} \le -\sqrt{3} \\ f(B) = \cot B - \frac{2}{\sin B} \le -\sqrt{3} \\ f(C) = \cot C - \frac{2}{\sin C} \le -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Như thế (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 7. Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta có:

$$1 + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \le \frac{13}{12}(\cos A + \cos B + \cos C) + \cos A\cos B\cos C.$$

Giải

Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng tương đương sau

$$2 + 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) \le \frac{13}{6}(\cos A + \cos B + \cos C) + 2\cos A\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) - 2\cos A\cos B\cos C \le \frac{13}{6}(\cos A + \cos B + \cos C). \qquad (1)$$

Theo hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác, ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 3 - (\sin^2 + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$= 3 - (2 + 2\cos A\cos B\cos C) = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

Vậy

$$(1) \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) + 1 \le \frac{13}{6}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow (\cos A + \cos B + \cos C)^2 + 1 \le \frac{13}{6}(\cos A + \cos B + \cos C). \qquad (2)$$

Do $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C > 1.$

Vì thế $(2) \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C + \frac{1}{\cos A + \cos B + \cos C} \le \frac{13}{6}$ (3)

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác thì

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

Vì thế từ (3) xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ với $1 < x \le \frac{3}{2}$

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \ \forall x \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left(1; \frac{3}{2}\right]$

Từ đó suy ra VT (3) = $f(\cos A + \cos B + \cos C) \le f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}.$

Vậy (3) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$ ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 8. Cho ABC là tam giác không có góc tù. Chứng minh:

$$\frac{1}{3}(\cos 3A + \cos 3B) - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos A + \cos B \ge \frac{5}{6}.$$

Giải

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau:

$$\frac{1}{3}\left(4\cos^3 A-3\cos A+4\cos^3 B-3\cos B\right)-\frac{1}{2}\left(2\cos^2 A-1+2\cos^2 B-1\right)$$

$$+\cos A+\cos B\geq\frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\cos^3 A-\cos^2 A\right)+\left(\frac{4}{3}\cos^3 B-\cos^2 B\right)\geq-\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow f(A)+f(B)\geq-\frac{1}{6},\qquad (1)$$

ở đây $f(x)=\frac{4}{3}x^3-x^2$ với $0\leq x<1$.

Ta có: $f'(x)=4x^2-2x$, và có bảng biến thiên sau

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & \frac{1}{2} & & 1\pi \\
\hline
f'(x) & \| & - & 0 & + & \| \\
\hline
f(x) & \| & \nearrow & -\frac{1}{2} & \searrow & \|
\end{array}$$

Từ đó suy ra $f(A)\geq-\frac{1}{12}$; $f(B)\geq-\frac{1}{12}$

Vậy (1) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ $A=B=60^0$

⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Giả thiết tam giác ABC không có góc tù là cần thiết

Thật vậy xét họ tam giác ABC với $A=180^0-\alpha$; $B=C=\frac{\alpha}{2}$ với $\alpha>0$ đủ bé

Khi đó ta có:

$$\lim_{\alpha\to0^+}\left[f(A)+f(B)\right]=\lim_{\alpha\to0^+}\left[\frac{4}{3}\cos^3(180^0-\alpha)-\cos^2(180^0-\alpha)-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$=-\frac{4}{3}-1+\frac{4}{3}-1=-2.$$

Vậy tồn tại $\alpha_1\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ mà $f(A_1)+f(B_1)<-\frac{3}{2}$,

ở đây A_1, B_1, C_1 với $A_1=180^0-\alpha_1$, $B_1=C_1=\frac{\alpha_1}{2}$.

§2. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN

Trong mục này xét các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác có điều kiện (nó cũng giống như trong mục xét các đẳng thức lượng giác có điều kiện).

A. Điều kiện cho dưới dạng hệ thức đại số hoặc lượng giác

Bài 1. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=1$.

Chứng minh: $\frac{3}{4}\leq\tan\frac{C}{2}<1$.

Giải

Ta có: $\tan\frac{C}{2}=\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\dfrac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}<1$

(do $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$ và $\tan\frac{A}{2}>0,\tan\frac{B}{2}>0$).

Mặt khác theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$1=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\geq2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}\Rightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\leq\frac{1}{4}\Rightarrow\tan\frac{C}{2}\geq\frac{3}{4}.$$

Kết hợp lại có đpcm.

Dấu bằng bên trái $\left(\tan\frac{C}{2}=\frac{3}{4}\right)\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$

⇔ABC là tam giác cân đỉnh C với $A=B=2\arctan\frac{1}{2}$.

Nhận xét: Lớp các tam giác ABC mà $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=1$ là khác rỗng

Thật vậy xét chẳng hạn lớp tam giác ABC với $\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$; $\tan\frac{B}{2}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow A=2\arctan\frac{1}{3}$; $B=2\arctan\frac{1}{3}$; $C=\pi-(A+B)$

Rõ ràng $A, B\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow0<C<\pi$ và $A+B+C=\pi$.

Bài 2. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $a<\frac{1}{2}(b+c)$.

Chứng minh khi đó $A<\frac{1}{2}(B+C)$. Mệnh đề đảo có đúng không?

Giải

1. Từ $a < \frac{1}{2}(b + c) \Rightarrow \sin A < \frac{1}{2}(\sin B + \sin C)$ (1)

Vì $\frac{\sin B + \sin C}{2} \le \sin\frac{B + C}{2}$, nên từ (1) có

$$\sin A < \sin\frac{B + C}{2} \qquad (2)$$

Vì $a < \frac{1}{2}(b + c)$, nên a không phải là cạnh lớn nhất ⇒ A không phải là góc lớn nhất $\Rightarrow 0 < A < 90^0$. Lại có $0 < \frac{B + C}{2} < 90^0$

Vì thế từ (2) suy ra $A < \frac{1}{2}(B + C)$ ⇒ đpcm.

2. Đảo lại giả sử $A < \frac{1}{2}(B + C)$. Với $\alpha > 0$ (sẽ chọn sau)

Đặt $A = 60^0 - \alpha;\ C = 30^0 + \alpha;\ B = 90^0$, khi đó $A < \frac{1}{2}(B + C)$.

Ta có $\sin(A + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin A\cos\alpha + \sin\alpha\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do $\cos\alpha < 1$; $\sin\alpha < \alpha \Rightarrow (\sin A) + \alpha > \sin A\cos\alpha + \sin\alpha\cos A$

hay $\alpha + \sin A > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \sin A > \frac{\sqrt{3}}{2} - \alpha. \qquad (2)$$

Lại có $\sin C = \sin(30^0 + \alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$\sin B = 1$,

nên $\sin B + \sin C = 1 + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha < \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha < \frac{3}{2} + \alpha$ (3) (do $\alpha > 0$)

Xét bất phương trình $\frac{\sqrt{3}}{2} - \alpha > \frac{1}{2}(3 + \alpha)$ với $\alpha > 0$

$$\Rightarrow 0 < \alpha < \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\right). \qquad (4)$$

Vậy nếu chọn α thỏa mãn (4) thì từ (2) (3) suy ra

$\sin A > \frac{1}{2}(\sin B + \sin C) \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}(b + c)$

Vậy mệnh đề đảo chưa chắc đúng.

Bài 3. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Chứng minh: $\max\{A; B; C\} > \frac{2\pi}{3}$.

Giải

Từ giả thiết suy ra

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

Vì $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$, nên từ (1) có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

Giả thiết phản chứng $\max\{A; B; C\} > \frac{2\pi}{3}$ (3)

Không giảm tổng quát có thể cho là $\max\{A; B; C\} = A$.

Khi đó từ (3) suy ra $\frac{\pi}{3} \le A \le \frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow \sin A \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (4)$$

Do $\sin B > 0$, $\sin C > 0 \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5).

Từ (2) (5) suy ra vô lí. Vậy giả thiết phản chứng là sai ⇒ đpcm.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $A \ge \frac{2\pi}{3}$. Chứng minh:

$$\cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos^2 A \le 1.$$

Giải

Do $A \ge \frac{2\pi}{3} \Rightarrow B + C \le \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(B + C) > 0$.

Ta có: $\cos B\cos C = \frac{1}{2}[\cos(B + C) + \cos(B - C)]$.

Vì $\cos(B + C) > 0 \Rightarrow \cos(B + C)\cos(B - C) \le \cos(B + C)$

$$\Rightarrow \cos B\cos C \ge \frac{1}{2}[\cos(B + C)\cos(B - C) + \cos(B - C)]$$

$$\Rightarrow \cos B\cos C \ge \cos^2\frac{B + C}{2}\cos(B - C)$$

$$\Rightarrow \cos B\cos C \ge \sin^2\frac{A}{2}(\cos B\cos C + \sin B\sin C)$$

$$\Rightarrow \left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)\cos B\cos C \geq \sin^2\frac{A}{2}\sin B\sin C.$$

Rõ ràng cosBcosC > 0, nên ta có: $\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} \geq \dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$

hay $\cot^2\dfrac{A}{2} \geq \tan B\tan C$. (1)

Lại do $A \geq \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} > \dfrac{A}{2} \geq \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \cot\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

vậy từ (1) có: $\tan B\tan C \leq \dfrac{1}{3}$. (2)

Trong mọi Δ không vuông ABC ta có:

tanA + tanB + tanC = tanAtanBtanC, nên từ (2) có:

$\tan A + \tan B + \tan C \geq \dfrac{1}{3}\tan A$ (do tanA < 0)

$\Rightarrow \tan B + \tan C \geq -\dfrac{2}{3}\tan A \Rightarrow \tan B + \tan C \geq \dfrac{-2\sin A}{3\cos A}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} \geq \dfrac{-2\sin A}{3\cos A}$. (2)

Do sin(B + C) = sinA > 0, nên từ (2) có $\dfrac{1}{\cos B\cos C} \geq \dfrac{-2}{3\cos A} = \dfrac{2}{-3\cos A}$.

Do cosBcosC > 0, cosA < 0, nên ta có:

$-3\cos A \geq 2\cos B\cos C$

$\Rightarrow -3\cos^2 A \leq 2\cos A\cos B\cos C$ (do cosA < 0)

$\Rightarrow -3\cos^2 A \leq 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$

$\Rightarrow 1 \geq \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos^2 A \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(B-C)=1\\ A=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow B = C, A = \dfrac{2\pi}{3}$

⇔ ABC là tam giác cân đỉnh A, với góc ở đỉnh $A = \dfrac{2\pi}{3}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có 2A + 3B = π.

Chứng minh 4(a + b) ≤ 5c.

Giải

Từ $\begin{cases}A+B+C=\pi\\ 2A+3B=\pi\end{cases}$ suy ra $A = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3B}{2}$; $C = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{B}{2}$

$$\Rightarrow \sin A = \cos\frac{3B}{2};\ \sin C = \cos\frac{B}{2}.$$

Theo định lí hàm số sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{4\cos^3\frac{B}{2} - 3\cos\frac{B}{2}} = \frac{b}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{B}{2}}.$$

Từ đó theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b}{4\cos^3\frac{B}{2} - 3\cos\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{B}{2}}.$$

Từ đó suy ra $c = \dfrac{a+b}{4\cos^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2} - 3}$ (1)

Ta lại thấy $4\cos^2\dfrac{B}{2} + 2\sin\dfrac{B}{2} - 3 = -4\sin^2\dfrac{B}{2} + 2\sin\dfrac{B}{2} + 1$

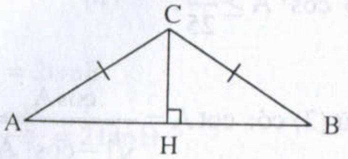
$= \dfrac{5}{4} - \left(2\sin\dfrac{B}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{5}{4}$ (2)

Từ (1) (2) đi đến 4(a + b) ≤ 5c ⇒ dpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}2A+3B=\pi\\ \sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow B = 2\arcsin\dfrac{1}{4};\ A = \dfrac{\pi}{2} - 3\arcsin\dfrac{1}{4}; C = \dfrac{\pi}{2} + \arcsin\dfrac{1}{4}$.

Nhận xét: Điều ngược lại chưa chắc đúng. Thật vậy xét chẳng hạn tam giác cân ABC đỉnh C có $a = b = \dfrac{5}{8}c$.



Rõ ràng ta có: 4(a + b) = 5c

(tức là thỏa mãn 4(a + b) ≤ 5c).

Kẻ CH ⊥ AB ⇒ $\cos A = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{4}{5}$.

Vì A = B ⇒ 2A + 3B = 5A.

Ta có: $\cos\dfrac{\pi}{5} = 1 - 2\sin^2\dfrac{\pi}{10} = 1 - 2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\Rightarrow A \neq \dfrac{\pi}{5}$ $\left(\text{vì } \cos A = \dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow 2A + 3B \neq \pi$.

Bài 6.

1. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: cotA + cotC = 2cotB.

   Chứng minh $B \le 60^0$.

2. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: cotA = 2(cotB + cotC).

   Chứng minh: $\cot B + \cot C \ge \frac{2}{3}$.

Giải

1. Ta có: cotA + cotB = 2cotB

$$\Rightarrow \frac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)}{4S} = \frac{2(a^2+c^2-b^2)}{4S}$$

$$\Rightarrow a^2+c^2=2b^2 \qquad (1)$$

Theo định lí hàm số cosin, ta có (kết hợp với (1))

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{b^2}{2ac} \ge \frac{b^2}{a^2+c^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow B \le 60^0 \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

2. Tương tự như phần 1/ ta có:

cotA = 2(cotB + cotC)

$$\Rightarrow b^2+c^2=5a^2. \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra A là góc nhọn, nên cosA > 0.

Vẫn từ (2) có:

$4a^2 = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 4a^2 = b^2 + c^2 - (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{2a^2}{bc} \Rightarrow \cos A \ge \frac{4a^2}{b^2+c^2} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos^2 A \ge \frac{16}{25}. \qquad (3)$$

$$\text{Từ (3) có: } \cot A = \frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}} \ge \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{4}{3}.$$

Vì cotA = 2(cotB + cotC) $\Rightarrow \cot B + \cot C \ge \frac{2}{3} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 7. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện tanA + tanC = 2tanB.

Chứng minh: $\cos A + \cos C \le \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Giải

Ta có: tanA + tanC = 2tanB

$$\Rightarrow \frac{\sin(A+C)}{\cos A\cos C} = 2\frac{\sin B}{\cos B}$$

$\Rightarrow 2\cos A\cos C = \cos B$ (do sin(A + C) = sinB > 0)

$\Rightarrow \cos(A+C) + \cos(A-C) = \cos B$

$$\Rightarrow \cos(A-C) = 2\cos B \qquad (1)$$

$$\text{Ta có: } \cos A + \cos C = 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{B}{2}\sqrt{\frac{1+\cos(A-C)}{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sqrt{1+2\cos B}$$

$$\text{Như vậy } (\cos A+\cos C)^2 = 2\sin^2\frac{B}{2}(1+2\cos B)$$

$$= \frac{1}{2}(2-2\cos B)(1+2\cos B). \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, thì

$$(\cos A+\cos C)^2 \le \frac{1}{2}\left[\frac{(2-2\cos B)+(1+2\cos B)}{2}\right]^2$$

$$\text{hay } (\cos A+\cos C)^2 \le \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos C \le \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hệ sau thỏa mãn

$$\begin{cases} \tan A + \tan C = 2\tan B \\ 2-2\cos B = 1+2\cos B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan A + \tan C = 2\tan B & (3) \\ \cos B = \frac{1}{4} & (4) \end{cases}$$

Từ tanA + tanC = 2tanB ⇔ tanA – tan(A + B) = 2tanB

$$\Leftrightarrow \tan A - \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B} = 2\tan B$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 A - 2\sqrt{15}\tan A + 1 = 0$$

(sau khi thay $\tan B = \sqrt{15}$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan A = \sqrt{15}+\sqrt{14} \\ \tan A = \sqrt{15}-\sqrt{14} \end{array}\right.$$

$$\text{Vậy dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\tan B = \sqrt{15}\\ \tan A = \sqrt{15}+\sqrt{14}\\ \tan C = \sqrt{15}-\sqrt{14}\end{cases}\\ \begin{cases}\tan B = \sqrt{15}\\ \tan A = \sqrt{15}-\sqrt{14}\\ \tan C = \sqrt{15}+\sqrt{14}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức sinA + sinC = 2sinB.

1. Chứng minh $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
2. Chứng minh cosA + cosC ≤ 1.
3. Chứng minh $b^2 \ge 6Rr$.

Giải

1. Từ sinA + sinC = 2sinB

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3} \quad (1)$$

(xem phần đẳng thức lượng giác có điều kiện)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{1}{4}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2\ge\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \left(\text{do}\tan\frac{A}{2}>0,\tan\frac{C}{2}>0\right).$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}\\ \tan\frac{A}{2}=\tan\frac{C}{2}\end{cases}$

⇔ ABC là tam giác đều

2. Từ sinA + sin2C = 2sinB ⇒ a + b = 2b ⇒ $p=\frac{3b}{2}$.

$$\text{Ta có: } \cos^2\frac{B}{2}=\frac{1+\cos B}{2}=\frac{1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{2}=\frac{\left((a+c)^2-b^2\right)}{4ac}$$

$$=\frac{p(p-b)}{ac}=\frac{\frac{3b}{2}\frac{b}{2}}{ac}=\frac{3b^2}{4ac}.$$

$$\text{Lại có } \cos B = 2\cos^2\frac{B}{2}-1 \Rightarrow \cos B=\frac{3b^2}{2ac}-1 \Rightarrow \cos B\ge\frac{3b^2}{(a+c)^2}-1=\frac{1}{2}$$

Do cosA + cosB + cosC ≤ $\frac{3}{2}$ mà cosB ≥ $\frac{1}{2}$

⇒ cosA + cosC ≤ 1 ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

3. Áp dụng công thức $R=\frac{abc}{4S}$ và $r=\frac{S}{p}$, ta có:

$$b^2\ge 6Rr \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow b^2\ge 6\frac{abc}{4S}\frac{S}{p}\Leftrightarrow\frac{a+c}{2}\ge\frac{3ac}{a+c+\frac{a+c}{2}}\quad\left(\text{do } b=\frac{a+c}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+c}{2}\ge\frac{2ac}{a+c}\Leftrightarrow(a+c)^2\ge 4ac$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2\ge 0. \quad (2)$$

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ a = c và $b=\frac{a+c}{2}$

⇔ a = b = c

⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 9. Cho tam gaic1 ABC thỏa mãn sinA + sinC = 3sinB.

Chứng minh $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{2}{3}$.

Giải

Từ sinA + sinC = 3sinB

⇒ a + c = 3b ⇒ a + b + c = 4b ⇒ p = 2b

$$\text{Ta có } \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

$$=\frac{(p-b)(p-c)}{4bc}=\frac{b.(2b-c)}{bc}=\frac{2b-c}{c}.$$

Tương tự có: $\sin^2\frac{C}{2}=\frac{2b-a}{a}$.

$$\text{Do đó } \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2b-c}{c}+\frac{2b-a}{a}\ge\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3b(a+c)\ge 4ac$$

$\Leftrightarrow (a + c)^2 \geq 4ac$

$\Leftrightarrow (a - c)^2 \geq 0.$ (2)

Vì (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A + \sin C = 3\sin B \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow a = c = \dfrac{3}{2}b.$

Nhận xét:

1. Vì sinA + sinC = 3sinB $\Leftrightarrow$ a + c = 3b, nên lớp tam giác này khác rỗng. Thật vậy xét lớp tam giác vuông Ai Cập có a = 5, c = 4, b = 3.
2. Ta có bài toán tổng quát sau (với lời giải hoàn toàn tương tự)

   Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức sinA + sinC = ksinB

   Chứng minh: $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{k-1}{k}.$

   Lời giải xin dành cho bạn đọc.

Bài 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\max\{l_a, l_b, l_c\} < 1$.

Chứng minh rằng $S < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Giải

Do vai trò bình đẳng nên có thể giả sử $a \leq b \leq c$.

Từ đó ta có: $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{1}{c}$. (1)

Từ $\max\{l_a, l_b, l_c\} < 1$ và do $h_a \leq l_a$,

nên rõ ràng $h_a < 1$. (2)

Áp dụng công thức $l_a = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$, nên từ $l_a < 1 \Rightarrow \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} < 1$

$\Rightarrow \cos\dfrac{A}{2} < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$ (3)

Từ (1) (2) suy ra $\cos\dfrac{A}{2} < \dfrac{1}{a}$. (4)

Do $a \leq b \leq c \Rightarrow A \leq B \leq C$, vậy A là góc nhỏ nhất trong tam giác nên $A \leq \dfrac{\pi}{3}$.

$\Rightarrow \cos\dfrac{A}{2} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (5)

Từ (3) (4) đi đến $\dfrac{1}{a} > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (6)

Kết hợp (2), (6) và có $S = \dfrac{1}{2}ah_a < \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét:

Mệnh đề đảo nói chung không đúng. Thật vậy xét tam giác cân ABC đỉnh A có $a = BC = \dfrac{1}{2}$, chiều cao AH = 2. Khi đó ta có:

$S = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tuy nhiên ta có: $l_a = AH = 2 \Rightarrow \max\{l_a, l_b, l_c\} \geq l_a = 2 > 1$.

Bài 11. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

$A \geq 2B \Leftrightarrow a^2 \geq b(b + c)$.

Giải

Do $A \geq 2B \Leftrightarrow A - B \geq B$ (1)

Chỉ có hai khả năng xảy ra:

a. Nếu A – B là nhọn, thì (1) $\Rightarrow \sin(A - B) \geq \sin B$.

b. Nếu A – B là tù, thì $\sin(A - B) = \sin[\pi - (A - B)] = \sin(\pi - A + B)$

Do $\pi - A + B > B$ và cả hai vế đều là góc nhọn, nên $\sin(\pi - A + B) > \sin B$.

Tóm lại ta luôn có:

$\sin(A - B) \geq \sin B$

$\Leftrightarrow \sin C\sin(A - B) \geq \sin C\sin B$ (do sinC > 0)

$\Leftrightarrow \sin(A + B)\sin(A - B) \geq \sin C\sin B$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos 2B - \cos 2A}{2} \geq \sin C\sin B$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 2A}{2} - \dfrac{1 - \cos 2B}{2} \geq \sin C\sin B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B \geq \sin C\sin B$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 \geq bc$

$\Leftrightarrow a^2 \geq b(b + c)$

Như vậy $A \geq 2B \Leftrightarrow a^2 \geq b(b + c)$. Đó là đpcm.

Bài 12. Cho tam giác ABC có $A \geq 3B$.

Chứng minh: $(a - b)^2(a + b) \geq bc^2$.

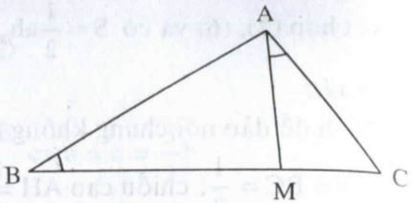
Mệnh đề đảo có đúng không?

Giải

Xét tam giác ABC có $A \geq 3B$.

Do $A \geq 3B$, nên gọi M là điểm trên BC sao cho $\widehat{CAM} = B$

$\Rightarrow \widehat{BAM} = A - B \geq 2B$.



Ta có: ΔAMC ∽ ΔABC, nên có

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow AM=\frac{bc}{a},$$

$$\frac{MC}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow MC=\frac{b^2}{a}.$$

Từ đó $MB = BC - MC = a-\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-b^2}{a}$.

Xét ΔBAM có $\widehat{BAM}\ge 2B$, nên theo bài 11 có:

$BM^2 \ge AM(AB+AM)$

$$\Rightarrow \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2}\ge\frac{bc}{a}\left(c+\frac{bc}{a}\right)\Rightarrow\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2}\ge\frac{bc^2(a+b)}{a^2}$$

$\Rightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge bc^2$.

Đó là đpcm.

Để xét xem mệnh đề đảo có đúng không, ta hãy xét ví dụ sau:

Lấy $a=\frac{6}{5}; b=2; c=1$. Rõ ràng có thể lấy a, b, c làm độ dài ba cạnh của tam giác.

Ta có: $(a+b)(a-b)^2=\frac{256}{125};\ bc^2=2$

$\Rightarrow (a+b)(a-b)^2 > bc^2$

Tuy nhiên $a < b \Rightarrow A < B$, vậy không thể có $A \ge 3B$.

Vậy mệnh đề đảo nói chung không đúng.

Bài 13. Cho tam giác ABC có $A \ge B + 2C$. Chứng minh: $\cos C\le\frac{a+b}{2a}$.

Giải

Từ $A \ge B + 2C \Rightarrow A - C \ge B + C$. (1)

Lập luận như bài 12, từ (1) suy ra $\sin(A - C) \ge \sin(B + C)$

$\Rightarrow \sin A\cos C - \sin C\cos A \ge \sin B\cos C + \sin C\cos B$

$\Rightarrow \cos C(\sin A - \sin B) \ge \sin C(\cos A + \cos B)$

$$\Rightarrow 2\cos C\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\ge 2\sin C\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Rightarrow \cos C\sin\frac{A-B}{2}\ge\sin C\cos\frac{A-B}{2}\quad\left(\text{do}\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}>0\right)$$

$\Rightarrow \tan\frac{A-B}{2}\ge\tan C$. (2)

(chú ý do $\cos\frac{A-B}{2}>0$ và từ $A \ge B + 2C \Rightarrow C$ nhọn nên $\cos C > 0$).

Ta có: $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$ (xem phần đẳng thức lượng giác trong tam giác)

$$\Rightarrow \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{A+B}{2}=\frac{a-b}{(a+b)\cot\frac{C}{2}}.\quad(3)$$

Từ (2) (3) suy r: $\frac{a-b}{a+b}\ge\frac{2\tan^2\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}\ge\frac{2\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}{1-\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\frac{1-\cos C}{\cos C}$

$$\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}+1\ge\frac{1}{\cos C}\Rightarrow\frac{2a}{a+b}\ge\frac{1}{\cos C}\Rightarrow\cos C\le\frac{a+b}{2a}\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Bài 14. Cho tam giác ABC không phải tam giác vuông thỏa mãn điều kiện $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\cot A+\cot B+\cot C$.

Chứng minh: $\tan A>\frac{\sqrt{3}}{3}$

Giải

Ta có: $\cot A + \cot B + \cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$,

$$\Rightarrow \sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

$$\Rightarrow \sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\frac{4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}{8R^2\sin A\sin B\sin C}$$

$\Rightarrow \sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}$. (1)

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu $A < 90^0$. Do $0 < \sin B\sin C < 1$, nên từ (1) suy ra $\sin A>\frac{1}{2}$.

   Kết hợp với $A < 90^0$, ta có: $30^0 < A < 90^0 \Rightarrow \tan A>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Nếu $A > 90^0$. Ta có:

   $\sin B\sin C=\frac{1}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)]\le\frac{1}{2}(1+\cos A)$.

   Từ (1) có: $\sin A(1 + \cos A) \ge 1$

$\Rightarrow \sin 2A + 2\sin A \ge 2$ (2)

Vì $180^0 > A > 90^0 \Rightarrow \sin 2A < 0$, vậy từ (2) có $\sin A > 1$

Đó là điều vô lí. Vậy không thể có khả năng $A > 90^0$

Từ đó suy ra đpcm.

Nhận xét: Qua việc giải ở trên, thực chất ta đã giải được bài toán sau:

Nếu ABC là tam giác không phải là tam giác vuông và có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \cot A + \cot B + \cot C$$

Khi đó ta có: $\max\{A, B, C\} < 90^0$,

$$\min\{A, B, C\} > 30^0.$$

Bài 15. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos A\cos B\cos C.$$

Chứng minh: $\dfrac{\tan\frac{A}{2}}{m_a} + \dfrac{\tan\frac{B}{2}}{m_b} + \dfrac{\tan\frac{C}{2}}{m_c} \ge \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Giải

Từ giả thiết ta có: $\cos A\cos B\cos C > 0 \Rightarrow$ ABC là tam giác nhọn.

Ta có: $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos A\cos B\cos C$.

$$\Rightarrow 2R^2\sin A\sin B\sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos A\cos B\cos C$$

$$\Rightarrow \tan A\tan B\tan C = \frac{3\sqrt{3}}{4R^2}. \quad (1)$$

Do ABC là tam giác nhọn, nên theo bất đẳng thức Cô si, có:

$$1 = \cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A \ge 3\sqrt[3]{(\cot A\cot B\cot C)^2}$$

$$\Rightarrow \cot^2 A\cot^2 B\cot^2 C \le \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow \tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt{3}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra $\frac{3\sqrt{3}}{4R^2} \ge 3\sqrt{3} \Rightarrow R \le \frac{1}{2}$ (3)

Do vai trò bình đẳng ta có thể cho là $A \ge B \ge C$

Vì A, B, C nhọn nên từ đó có $\begin{cases} \tan\frac{A}{2} \ge \tan\frac{B}{2} \ge \tan\frac{C}{2} \\ m_a \le m_b \le m_c \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Trêbơsép có:

$$\left(\frac{\tan\frac{A}{2}}{m_a} + \frac{\tan\frac{B}{2}}{m_b} + \frac{\tan\frac{C}{2}}{m_c}\right) \ge \frac{1}{3}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}\right) \quad (4)$$

Lại có $\begin{cases} \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3} \\ \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \ge \frac{2}{R} \end{cases}$

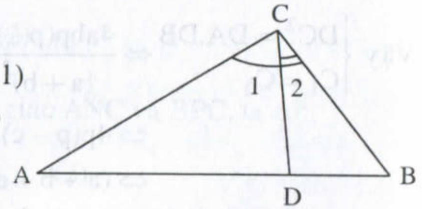
Vậy từ (4) có: $\dfrac{\tan\frac{A}{2}}{m_a} + \dfrac{\tan\frac{B}{2}}{m_b} + \dfrac{\tan\frac{C}{2}}{m_c} \ge \dfrac{2\sqrt{3}}{3R}$. (5)

Từ (3) (5) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

B. Điều kiện cho dưới dạng hình học

Bài 1. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện trên cạnh AB tồn tại điểm D sao cho $CD^2 = DA.DB$. Chứng minh rằng: $\sin A\sin B \le \sin^2\frac{C}{2}$.

Giải



Giả sử tồn tại $D \in AB$ sao cho

$CD^2 = DA.DB$. (1)

Theo định lý hàm số sin trong các ΔACD và BCD có:

$\frac{CD}{\sin A} = \frac{DA}{\sin C_1}$, ở đây $C_1 = \widehat{ACD}$,

$\frac{CD}{\sin B} = \frac{DB}{\sin C_1}$, ở đây $C_2 = \widehat{BCD}$.

Từ đó suy ra $\frac{CD^2}{\sin A\sin B} = \frac{DA.DB}{\sin C_1\sin C_2}$ (2)

Vì thế kết hợp (1) (2), ta có:

$\sin A\sin B = \sin C_1\sin C_2$. (3)

Do $\sin C_1 > 0$, $\sin C_2 > 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{\sin C_1\sin C_2} \le \frac{\sin C_1 + \sin C_2}{2}$$

$$\Rightarrow \sin C_1\sin C_2 \le \sin^2\frac{C_1 + C_2}{2}\sin^2\frac{C_1 - C_2}{2} \le \sin^2\frac{C_1 + C_2}{2} = \sin^2\frac{C}{2} \quad (4)$$

Từ (3) (4) đi đến $\sin A\sin B \le \sin^2\dfrac{C}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ta có: $\begin{cases} DC^2 = DA.DB \\ C_1 = C_2 \end{cases}$

Khi $C_1 = C_2$, thì CD là đường phân giác trong của góc C.

Lúc đó $CD = \dfrac{2ab\cos\dfrac{C}{2}}{a+b}$

$$\Rightarrow CD^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}(1+\cos C)$$

$$= \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}\left[1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right] = \frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2-c^2\right] = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}$$

Theo định lý đường phân giác trong ta có:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{AD}{c} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow AD = \frac{bc}{a+b}$$

Tương tự $DB = \dfrac{ac}{a+b}$

$$\text{Vậy} \begin{cases} DC^2 = DA.DB \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2} = \frac{bc}{a+b}\frac{ac}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow 4p(p-c) = c^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c) = c^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow a + b = c\sqrt{2}.$$

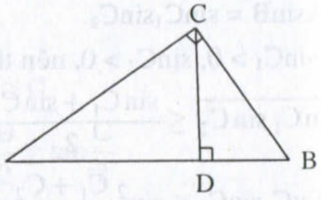
Vậy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ CD là phân giác của góc C và $a + b = c\sqrt{2}$.

Nhận xét: Lớp các tam giác ABC thỏa mãn điều kiện hình học nêu trên là khác rỗng. Dễ thấy một trong chúng là lớp các tam giác vuông. Thật vậy lấy D là chân đường cao kẻ từ đỉnh C của tam giác.

Ta có: $CD^2 = DA.DB$.

Từ đó suy ra một trong các lớp thỏa mãn dấu bằng trong bất đẳng thức:

$\sin A\sin B = \sin^2\dfrac{C}{2}$

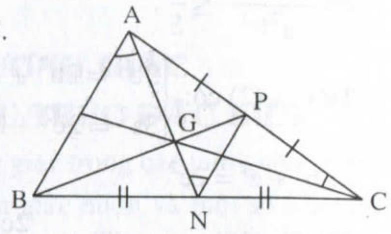


là lớp các tam giác vuông cân đỉnh C.

Bài 2. Giả sử G là trọng tâm tam giác ABC. Biết rằng AB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AGC. Chứng minh:

$$\sin\widehat{CAG} + \sin\widehat{CBG} \le \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Giải



Gọi N, P tương ứng là trung điểm của BC, AC.

Vì AB là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác AGC, nên $\widehat{BAG} = \widehat{ACG}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây cung bằng góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Do NP // AB $\Rightarrow \widehat{BAG} = \widehat{ANP}$

Từ đó $\widehat{ANP} = \widehat{ACG} \Rightarrow$ GNCP là tứ giác nội tiếp.

Vì thế $\begin{cases} AG.AN = AP.AC \\ BG.BP = BN.BC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}m_a.m_a = \dfrac{b}{2}.b \\ \dfrac{2}{3}m_b.m_b = \dfrac{a}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}m_a & (1) \\ a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}m_b & (2) \end{cases}$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong các tam giác ANC và BPC, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AN}{\sin C} = \dfrac{CN}{\sin\widehat{CAN}} \\ \dfrac{BP}{\sin C} = \dfrac{CP}{\sin\widehat{CBP}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\widehat{CAN} = \dfrac{a\sin C}{2m_a} & (3) \\ \sin\widehat{CBP} = \dfrac{b\sin C}{2m_b} & (4) \end{cases}$$

Áp dụng công thức $\dfrac{a\sin C}{2} = \dfrac{S}{b};\ \dfrac{b\sin C}{2} = \dfrac{S}{a}$. (5)

Từ (12) hiển nhiên đúng $\Rightarrow$ (8) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Từ (3) (4) (5) có:

$$\sin\widehat{CAG} + \sin\widehat{CBG} = \sin\widehat{CAN} + \sin\widehat{CBP}$$

$$= S\left(\frac{1}{bm_a} + \frac{1}{am_b}\right). \qquad (6)$$

Bây giờ kết hợp (1), (2), (6) đi đến

$$\sin\widehat{CAG} + \sin\widehat{CGB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}S\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \qquad (7)$$

Từ (7) ta có: $\sin\widehat{CAG}+\sin\widehat{CBG}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (8)

$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}S\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\le\frac{1}{S}$. (9)

Từ (1), (2) có: $\begin{cases}3b^2=2b^2+2c^2-a^2\\3a^2=2c^2+2a^2-b^2\end{cases}$

$\Rightarrow b^2+a^2=2c^2$ (10)

Từ (9), (10) suy ra (8) $\Leftrightarrow \frac{2c^2}{a^2b^2}\le\frac{1}{S}$. (11)

Theo định lí hàm số cosin, ta có từ (10):

$b^2+a^2=c^2+(b^2+a^2-2ab\cos C)\ \Rightarrow c^2=2ab\cos C$.

Vì thế từ (11) có:

(8) $\Leftrightarrow \frac{4ab\cos C}{a^2b^2}\frac{1}{S} \Leftrightarrow \frac{4\cos C}{ab}\le\frac{2}{ab\sin C}$

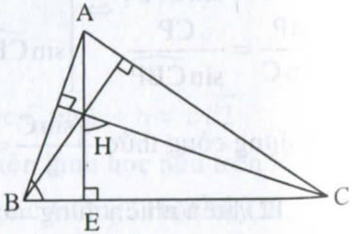
$\Leftrightarrow \sin 2C\le 1$. (12)

Vì (12) hiển nhiên đúng $\Rightarrow$ (8) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ AB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔAGC và $C=45^0$.

Bài 3. Cho ABC là tam giác nhọn và trực tâm H chia đôi đường cao AE. Chứng minh: $\tan A\ge 2\sqrt{2}$.

Giải



Ta có: $\tan B=\tan\widehat{CHE}=\frac{EC}{HE}$.

$\tan C=\frac{AE}{EC}$.

Vì $AE=2HE\Rightarrow \tan B\tan C=2$. (1)

Lại có $\tan A=-\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}=\tan B+\tan C$ (2)

(dựa vào (1))

Từ $\tan B\tan C=2\Rightarrow \tan B$, $\tan C$ cùng dấu và do chúng không thể cùng âm

$\Rightarrow \tan B>0,\ \tan C>0$.

Theo bất đẳng thức Côsi, thì $\tan A=\tan B+\tan C\ge 2\sqrt{\tan B\tan C}$ (3)

Từ (1), (3) có $\tan A\ge 2\sqrt{2}\ \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:

Cho tam giác nhọn ABC, và trực tâm H chia đường cao AE theo tỷ số:

$\frac{AH}{HE}=m$

Khi đó $\tan A\ge 2\sqrt{m+1}$ (kết quả trong bài 3/ ứng với m = 1).

§3. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG CÁC TAM GIÁC CÓ CẤU TRÚC ĐẶC BIỆT

Trong mục này xét các bất đẳng thức lượng giác trong các tam giác có các cấu trúc đặc biệt như lớp tam giác vuông, tam giác nhọn và một số lớp tam giác có các cấu trúc riêng...

A. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác vuông

Bài 1. Cho ABC là tam giác vuông đỉnh A. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $4(ac+b^2)\le 5a^2$.
2. $\frac{p}{h_a}\ge 1+\sqrt{2}$.
3. $\frac{r^2}{m_b^2+m_c^2}\le\frac{3-2\sqrt{2}}{5}$.
4. $\cos\varphi\ge\frac{4}{5}$, ở đây φ là góc nhọn giữa hai đường trung tuyến kẽ từ B và C.

Giải

1. Ta có: $4(ac+b^2)\le 5a^2$ (1)

$\Leftrightarrow 4\sin C\sin A+4\sin^2B\le 5\sin^2A$

$\Leftrightarrow 4\sin C+4\sin^2B\le 5$ (do $\sin A=\sin 90^0=1$)

$\Leftrightarrow 5-4\sin C-4\sin^2B\ge 0$

$\Leftrightarrow 5-4\sin C-4(1-\cos^2B)\ge 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2C-4\sin C+1\ge 0$ (do $\cos B=\sin C$)

$\Leftrightarrow (2\sin C-1)^2\ge 0$. (2)

Vì (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}A=\frac{\pi}{2}\\C=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ABC là nửa tam giác đều $\left(A=\frac{\pi}{2};\ B=\frac{\pi}{3};\ C=\frac{\pi}{6}\right)$.

2. $\dfrac{p}{h_a} \geq 1+\sqrt{2}$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2\frac{bc}{a}} \geq 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)a}{2bc} \geq 1+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.2R}{8R^2\sin B\sin C} \geq 1+\sqrt{2} \quad (\text{do } a = 2R)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \geq 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{4\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2} \leq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} \leq 1. \quad (2) \left(\text{do } \cos\frac{B+C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vì (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

3. Ta có:

$$\frac{r^2}{m_b^2+m_c^2} = \frac{S^2}{p^2\left(\frac{2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2}{4}\right)} = \frac{\frac{b^2c^2}{4}}{\frac{(a+b+c)^2}{4}.\frac{(4a^2+b^2+c^2)}{4}}$$

$$= \frac{4b^2c^2}{5a^2\left(b+c+\sqrt{b^2+c^2}\right)^2} \quad (1) \ (\text{do } a^2 = b^2+c^2).$$

Ta có: $a^2 = b^2+c^2 \geq 2bc$ (2)

$b+c+\sqrt{b^2+c^2} \geq 2\sqrt{bc}+\sqrt{2bc} = \sqrt{bc}\left(2+\sqrt{2}\right)$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra $\dfrac{r^2}{m_b^2+m_c^2} \geq \dfrac{4b^2c^2}{10bc\left[\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{bc}\right]^2}$

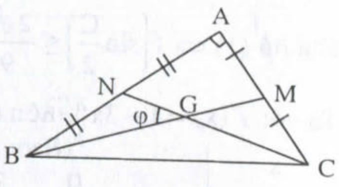
$$\Rightarrow \frac{r^2}{m_b^2+m_c^2} \geq \frac{2}{5.2\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{5} = \frac{3-2\sqrt{2}}{5}.$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ b = c

⇔ ABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

4. Giả sử BM và CN là hai trung tuyến và $BM \cap CN = G \Rightarrow \widehat{NGB} = \varphi$.

Ta có: $\widehat{ANC} = \widehat{ABM} + \varphi$.



$\Rightarrow \tan\widehat{ANC} = \tan\left(\widehat{ABM}+\varphi\right)$ (1)

Ta có: $\tan\widehat{ANC} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{2b}{c}$,

$\tan\widehat{ABM} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{b}{2c}$, vậy từ (1) có:

$$\frac{2b}{c} = \frac{\frac{b}{2c}+\tan\varphi}{1-\frac{b}{2c}\tan\varphi} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{3bc}{2\left(b^2+c^2\right)} \Rightarrow \tan\varphi \leq \frac{3bc}{4bc} \Rightarrow \tan\varphi \leq \frac{3}{4}.$$

Vì $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} \Rightarrow \cos\varphi \geq \dfrac{4}{5} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ b = c ⇔ ABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

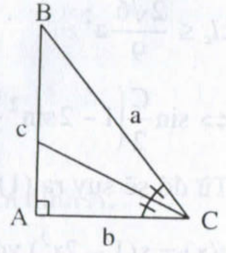
Bài 2. Cho ABC là tam giác vuông đỉnh A. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $l_c \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}h_a$. 2. $cl_c \leq \dfrac{2\sqrt{6}}{9}a^2$. 3. $l_a^4 \leq m_a h_a^3$.

4. $S \geq \left(1+\sqrt{2}\right)S_{AEF}$, ở đây AE, AF tương ứng là các phân giác của hai góc $\widehat{BAH}$, $\widehat{CAH}$ trong đó AH là chiều cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Giải

1. Ta có: $l_c \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}h_a$



$$\Leftrightarrow \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{bc}{a} \Leftrightarrow \frac{2a\cos\frac{C}{2}}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}c}{4a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a\cos\frac{C}{2}}{a(1+\cos C)} \geq \frac{3\sqrt{3}\sin C}{4} \quad (\text{do } b = a\cos C;\ c = a\sin C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{3\sqrt{3}\sin C}{4} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}\sin C\cos\frac{C}{2} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2} \leq 4 \Leftrightarrow 6\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}\left(1-\sin^2\frac{C}{2}\right) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}\left(1-\sin^2\frac{C}{2}\right) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x(1 - x^2)$ với $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f\left(\sin\frac{C}{2}\right) \le \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ta có: $f'(x) = 1 - 3x^2$, nên có bảng biến thiên sau:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & \frac{1}{\sqrt{3}} & & \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\hline
f'(x) & \| & + & 0 & - & \| \\
\hline
f(x) & \| & \nearrow & \frac{2\sqrt{3}}{9} & \searrow & \|
\end{array}$$

Vậy so $0 < C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin\frac{C}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, nên ta có:

$$f\left(\sin\frac{C}{2}\right) \le f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Vậy (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ \cos C = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ C = \arccos\frac{1}{3} \end{cases}.$$

2. Làm tương tự như phần 1/ và có:

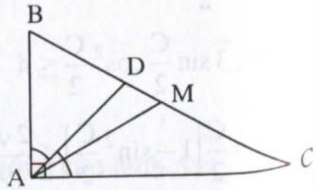
$$cl_c \le \frac{2\sqrt{6}}{9}a^2$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right) \le \frac{\sqrt{6}}{9}. \qquad (1)$$

Từ đó sẽ suy ra (1) là đúng bằng cách xét hàm số

$f(x) = x(1 - 2x^2)$ với $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Ta có: $l_a^4 \le m_a h_a^3$



$$\Leftrightarrow \left(\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\right)^4 \le \frac{a}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^3 \left(\text{do } m_a = \frac{a}{2}, h_a = \frac{bc}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{16b^4c^4\cos^4\frac{A}{2}}{(b+c)^4} \le \frac{b^3c^3}{2a^2}. \qquad (1)$$

Do $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ và $b + c = a(\sin B + \sin C)$, nên

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4bc}{a^4(\sin B + \sin C)^4} \le \frac{1}{2a^2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin B\sin C \le (\sin B + \sin C)^4. \qquad (2)$$

Do $\sin C = \cos B$, nên (2) $\Leftrightarrow 8\sin B\cos B \le (\sin B + \cos B)^4$

$$\Leftrightarrow 4\sin 2B \le (1 + \sin 2B)^2$$

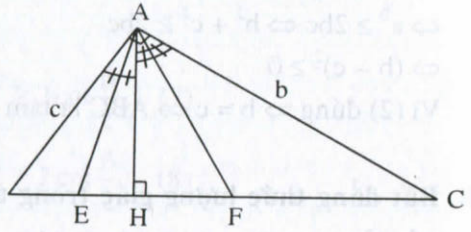
$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2B)^2 \ge 0. \qquad (3)$$

Vì (3) đúng suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ \sin 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

4. Dễ thấy CAE là tam giác cân đỉnh C và BAF là tam giác cân đỉnh B, nên có CE = b; BF = c. Từ đó:

EF = b + c – a.



Ta có: $S \ge (\sqrt{2} + 1)S_{AEF}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.AH \ge \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1).EF.AH$$

$$\Leftrightarrow a \ge (\sqrt{2} + 1)(b + c - a)$$

$$\Leftrightarrow 1 \ge (\sqrt{2} + 1)(\sin B + \sin C) - \sqrt{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \ge (\sqrt{2} + 1)(\sin B + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \ge \sin B + \cos B$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \ge \sqrt{2}\cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (1)$$

Vì (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

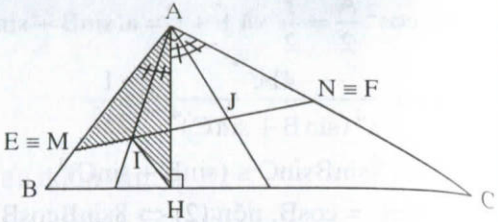
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow B = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

Bài 3. Cho ABC là tam giác vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABH và ACH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh: $S \ge 2S_{AEF}$.

Giải

Lấy hai điểm M ∈ AB, N ∈ AC sao cho AM = AN = AH.

Giả sử MN tương ứng cắt các đường phân giác trong của hai góc $\widehat{BAH}$, $\widehat{CAH}$ tại I và J.



Ta có: $\Delta MAI = \Delta HAI$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{AHI}$.

Do $\widehat{AMI} = \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = 45^0$

(vì AMN là tam giác vuông cân)

$\Rightarrow \widehat{AHI} = 45^0$

$\Rightarrow$ HI là phân giác $\widehat{AHB}$ $\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABH.

Tương tự J là tâm đường nội tiếp ΔAHC

Điều đó có nghĩa là $M \equiv E$; $N \equiv F$.

Từ đó ta có: $AE = AF = AH = \dfrac{bc}{a}$.

Vì thế $S \geq 2S_{AEF}$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}bc \geq 2.\dfrac{1}{2}AE.AF \Leftrightarrow \dfrac{bc}{2} \geq \dfrac{(bc)^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow a^2 \geq 2bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$

$\Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$ (2)

Vì (2) đúng $\Rightarrow b = c \Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

B. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác nhọn hoặc tam giác không có góc tù.

Trong mục này ta sẽ xét các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác nhọn hoặc tam giác không có góc tù. Cần nhấn mạnh rằng, các bất đẳng thức này sẽ không còn đúng nữa nếu tam giác đã cho không có đặc thù là "nhọn" hoặc là tam giác "có góc tù"

Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn, ta có:

1. $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} \geq \sqrt{\cot\dfrac{A}{2}} + \sqrt{\cot\dfrac{B}{2}} + \sqrt{\cot\dfrac{C}{2}}$.
2. $(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$.
3. $\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$.

Giải

1. Trước hết ta chứng minh rằng $\tan A \tan B \geq \cot^2\dfrac{C}{2}$ (1)

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} \geq \dfrac{1+\cos C}{1-\cos C}$ (2)

Do $\cos A > 0$, $\cos B > 0$, $1 - \cos C > 0$, nên

(2) $\Leftrightarrow \sin A\sin B - \sin A\sin B\cos C \geq \cos A\cos B + \cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B - \cos A\cos B \geq \cos C(\cos A\cos B + \sin A\sin B)$

$\Leftrightarrow -\cos(A + B) \geq \cos C.\cos(A - B)$

$\Leftrightarrow \cos C \geq \cos(A - B)$

$\Leftrightarrow 1 \geq \cos(A - B)$. (3)

Vì (3) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng, và dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow A = B$.

Do $\tan A > 0$, $\tan B > 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$\tan A + \tan B \geq 2\sqrt{\tan A \tan B}$. (4)

Từ (1) (4) suy ra $\tan A \tan B \geq \cot\dfrac{C}{2}$. (4)

Lại có từ (1) $2\sqrt{\tan A \tan B} \geq 2\cot\dfrac{C}{2}$. (5)

Cộng từng vế (4) (5), đi đến $\left(\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B}\right)^2 \geq 4\cot\dfrac{C}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} \geq 2\cot\dfrac{C}{2}$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow A = B$.

Lập luận tương tự, có: $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan C} \geq 2\cot\dfrac{B}{2}$, (7)

$\sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} \geq 2\cot\dfrac{A}{2}$. (8)

Dấu bằng trong (7), (8) xảy ra tương ứng khi và chỉ khi A = C; B = C

Từ (6) (7) (8) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Rõ ràng khi ABC không phải là tam giác nhọn, thì vế trái của bất đẳng thức là không có nghĩa! Vậy giả thiết ABC là nhọn trong bất đẳng thức trên là điều kiện trước hết để các biểu thức có mặt trong bất đẳng thức là có nghĩa.

2. Do A, B, C nhọn nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$2\cos A\cos B = \sqrt{\sin 2A \cot A \sin 2B \cot B} \leq \dfrac{1}{2}(\sin 2A \cot B + \sin 2B \cot A)$ (1).

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin A = \sin B$

$\Leftrightarrow A = B$ (do A, B nhọn).

Tương tự ta có:

$2\cos B\cos C \leq \dfrac{1}{2}(\sin 2B\cot C + \sin 2C\cot B)$, (2)

$2\cos C\cos A \leq \dfrac{1}{2}(\sin 2C\cot A + \sin 2A\cot C)$. (3)

Dấu bằng trong (2), (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow B = C; C = A$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có:

$$2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$$

$$\le \frac{1}{2}[\cot A(\sin 2C + \sin 2B) + \cot B(\sin 2A + \sin 2C) + \cot C(\sin 2A + \sin 2B)] \quad (4)$$

Dễ thấy $\cot A(\sin 2C + \sin B) = 2\dfrac{\cos A}{\sin A}\sin(C + B)\cos(C - B)$

$$= -2\cos(B + C)\cos(C - B) = -(\cos 2C + \cos 2B).$$

Vì vậy bằng lập luận tương tự suy ra

$$(4) \Leftrightarrow 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$$

$$\le -\frac{1}{2}(\cos 2C + \cos 2B + \cos 2A + \cos 2C + \cos 2A + \cos 2B)$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$$

$$\le (\sin^2 A - \cos^2 A) + (\sin^2 B - \cos^2 B) + (\sin^2 C - \cos^2 C)$$

$$\Leftrightarrow (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \le \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Xét khi ABC không phải tam giác nhọn

1. Nếu ABC là tam giác vuông (chẳng hạn $A = 90^0$), khi đó

$$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 = (\sin B + \sin C)^2 = \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B\sin C$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin^2 B + \sin^2 C$$

Vậy $(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \le \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$\Leftrightarrow 2\sin B\sin C \le 1$

$\Leftrightarrow 2\sin B\cos B \le 1$

$\Leftrightarrow \sin 2B \le 1 \qquad (*)$

Vì (*) đúng, nên bất đẳng thức đúng khi ABC là tam giác vuông và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

2. Nếu ABC là tam giác có góc tù

Xét ΔABC với $A = 120^0$; $B = C = 30^0$

$$\Rightarrow (\cos A + \cos B + \cos C)^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 = 3\frac{1}{4} - \sqrt{3}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Rõ ràng $3\frac{1}{4} - \sqrt{3} > \frac{5}{4} \quad (\text{vì } 2 > \sqrt{3})$

$$\Rightarrow (\cos A + \cos B + \cos C)^2 > \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

Bất đẳng thức không còn đúng nữa.

Vậy với phần 2/ ta có thể mở rộng chút ít kết quả như sau:

Trong mọi tam giác không có góc tù ta luôn có:

$$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 > \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều hoặc tam giác vuông cân!

3. Ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{1}{2}[(\cos A + \cos B) + (\cos B + \cos C) + (\cos C + \cos A)]$$

$$= \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A - B}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C - A}{2} \quad (1).$$

Ta có: $\cos\dfrac{A - B}{2} \le 1$ và do C nhọn nên $0 < \dfrac{C}{2} < 60^0 \Rightarrow 2\cos\dfrac{C}{2} > 1$

$$\Rightarrow \cos\frac{A - B}{2} < 2\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A - B}{2} < \sin C \quad (2)$$

Lập luận tương tự có: $\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B - C}{2} < \sin A \quad (3)$

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C - A}{2} < \sin B \quad (4)$$

Từ (2) (3) (4) suy ra đpcm.

Nhận xét: Xét khi ABC không phải là tam giác nhọn

1. Nếu ABC là tam giác vuông (chẳng hạn $A = 90^0$)

Khi đó $\cos A + \cos B + \cos C = \sin B + \sin C < \sin A + \sin B + \sin C$

Vậy bất đẳng thức vẫn đúng khi ABC là tam giác vuông.

2. Nếu ABC là tam giác có góc tù

Lấy tam giác ABC có $A = \pi - \alpha$; $B = C = \dfrac{\alpha}{2}$ và $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$

(lúc này có $\alpha < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$ A là góc tù).

Khi ấy $\sin A + \sin B + \sin C = \sin\alpha + 2\sin\dfrac{\alpha}{2} < 3\sin\alpha$ (do $\sin\dfrac{\alpha}{2} < \sin\alpha$)

$$\cos A + \cos B + \cos C = -\cos\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2} > \cos\alpha \text{ (do } \cos\frac{\alpha}{2} > \cos\alpha)$$

Vì $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ nên suy ra $\cos\alpha = 3\sin\alpha$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C > \sin A + \sin B + \sin C$$

Vậy bất đẳng thức không còn đúng nữa.

Giống như phần 2/ ta có kết luận sau:

Nếu ABC là tam giác không có góc tù thì

$\cos A + \cos B + \cos C < \sin A + \sin B + \sin C$.

Bài 3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn, ta có:

1. $\tan A + \tan B + \tan C \geq 2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$.
2. $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} \geq \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}$.
3. $\cot A + \cot B + \cot C + \cot 2A + \cot 2B + \cot 2C \leq 0$.

Giải

1. Do ABC không phải tam giác vuông nên ta có:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C = \frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}. \quad (1)$$

Trong mọi tam giác nhọn, ta có: $0 < \text{co}A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$,

nên từ (1) suy ra $\tan A\tan B \geq 8\sin A\sin B\sin C$. (2)

Ta lại có: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$. (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra đpcm.

Nhận xét:

1. Rõ ràng nếu ABC là tam giác vuông chẳng hạn $A = 90^0$ thì $\tan A$ không có nghĩa.
2. Nếu ABC là tam giác có góc tù (chẳng hạn $A > 90^0$)

Khi đó B, C là nhọn $\Rightarrow \tan A\tan B\tan C < 0$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C < 0$.

Mặt khác $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2B = 4\sin A\sin B\sin C > 0$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C < 2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$.

Vậy giả thiết ABC là tam giác nhọn thực sự cần thiết!

2. Do $\cos A > 0$, $\cos B > 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{4}{\cos A + \cos B} = \frac{4}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{2}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{2}{\sin\frac{C}{2}} \quad (1)$$

Lập luận tương tự có: $\dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} \geq \dfrac{2}{\sin\frac{A}{2}}$, (2)

$$\frac{1}{\cos C} + \frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{\sin\frac{B}{2}}. \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Nếu ABC là tam giác vuông chẳng hạn $A = 90^0 \Rightarrow \cos A = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos A}$ không có nghĩa.

2. Nếu ABC là tam giác có góc tù chẳng hạn $A > 90^0 \Rightarrow B, C < 90^0$.

Ta có thể giả sử $B \geq C \Rightarrow 0 < C < 45^0 \Rightarrow \tan C < 1$

Vì $\sin\frac{C}{2} < \sin C < \cos C$. Từ đó $\dfrac{1}{\cos C} < \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Mặt khác $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} = \dfrac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos B} < 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} < \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Ta được bất đẳng thức với chiều ngược lại.

Vậy giả thiết ABC là tam giác nhọn thực sự cần thiết.

3. Ta có:

$$\cot 2A + \cot 2B = \frac{\sin(2A+2B)}{\sin 2A\sin 2B} = \frac{-2\sin 2C}{\cos(2A-2B) - \cos(2A+2B)}. \quad (1)$$

Do $0 < C < 90^0 \Rightarrow \sin 2C > 0$

và $\cos(2A - 2B) - \cos(2A + 2B) = \cos(2A - 2B) - \cos 2C \leq 1 - \cos 2C$

Vì thế từ (1) có: $\cot 2A + \cot 2B \leq \dfrac{-2\sin 2C}{1 - \cos 2C}$

$\Rightarrow \cot 2A + \cot 2B \leq -2\cot C$. (2)

Lập luận tương tự có:

$\cot 2B + \cot 2C \leq -2\cot A$, (3)

$\cot 2C + \cot 2A \leq -2\cot B$. (4)

Cộng từng vế (2) (3) (4) có

$\cot A + \cot B + \cot C + \cot 2A + \cot 2B + \cot 2C \leq 0$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Nếu ABC là tam giác vuông chẳng hạn $A = 90^0 \Rightarrow 2A = 180^0$

$\Rightarrow$ cot2A không có nghĩa.

2. Nếu ABC là tam giác có góc tù

   Lấy ΔABC có $A = 120^0$; $B = C = 30^0$

   $\Rightarrow \cot A + \cot 2A = \cot 120^0 + \cot 240^0 = -\cot 60^0 + \cot 60^0 = 0.$

   Lại có $\cot B + \cot C + \cot 2B + \cot 2C = 2\cot 30^0 + 2\cot 60^0 > 0$

   $\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C + \cot 2A + \cot 2B + \cot 2C > 0.$

   Vậy giả thiết ABC là tam giác nhọn là thực sự cần thiết.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu ABC là tam giác không có góc tù, thì

1. $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \ge \left(1+\sqrt{2\cos A\cos B\cos C}\right)^2$

2. $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} \ge 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

3. $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) > 4.$

4. $$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}$$
   $$\le \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Giải

1. Do ABC là tam giác không có góc tù nên xét hai khả năng sau:

   a. Nếu ABC là tam giác vuông (chẳng hạn $A = 90^0$)

   Khi đó $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \ge \left(1+\sqrt{2\cos A\cos B\cos C}\right)^2$ (1)

   $\Leftrightarrow \sin B + \sin C + \sin B\sin C \ge 1$

   $\Leftrightarrow \sin B + \cos B + \sin B\cos B \ge 1.$ (2)

   Rõ ràng ta có: $\sin B > \sin^2 B$

   $\cos B > \cos^2 B$

   $\Rightarrow$ VT (1) > 1 vậy (2) đúng và dấu bằng không xảy ra, tức là (1) đúng và trường hợp này không xảy ra dấu bằng.

   b. Nếu ABC là tam giác nhọn. Khi đó dễ thấy

   $\tan A + \tan B + \tan C \ge \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$

   $\Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C \ge \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

   $\Leftrightarrow \dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C} \ge \dfrac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

$\Leftrightarrow 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \ge \cos A\cos B\cos C$ (3)

(do ABC là tam giác nhọn nên $\cos A\cos B\cos C > 0$)

$\Leftrightarrow (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \ge \cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$

$\ge 2\cos A\cos B\cos C + 2(\cos A + \cos B + \cos C) - 1.$ (4)

Từ (3) có: $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \ge \sqrt{2\cos A\cos B\cos C}$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \mathrm{os}C \ge \sqrt{2\cos A\cos B\cos C} + 1$ (5).

Từ (4) (5) đi đến $\cos A + \cos B + \cos C + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$

$\ge 2\cos A\cos B\cos C + 2\sqrt{2\cos A\cos B\cos C} + 1$

$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$

$\ge \left(1+\sqrt{2\cos A\cos B\cos C}\right)^2.$ (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều

Dễ dàng thấy rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

$\cos A + \cos B + \cos C + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$

$= \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A.$ (7)

Thật vậy

(7) $\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B) + \cos(B + C) + \cos(C + A) = 0$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C - \cos C - \cos A - \cos B = 0$ (8)

Vì (8) đúng nên (7) đúng.

Từ (7) (8) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều

Nhận xét: Giả thiết ABC là tam giác không có góc tù là cần thiết, vì nếu chẳng hạn $A > 90^0 \Rightarrow B < 90^0, C < 90^0 \Rightarrow \cos A\cos B\cos C < 0$

$\Rightarrow$ biểu thức $\sqrt{2\cos A\cos B\cos C}$ không có nghĩa!

2. Do $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$, nên

   $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} \ge 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   $\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \ge \cos A + \cos B + \cos C + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$

   $\Leftrightarrow (\sin A - \cos A) + (\sin B - \cos B) + (\sin C - \cos C) \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$

   $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(B-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(C-\dfrac{\pi}{4}\right) \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\ge \cos A+\cos B+\cos C \quad (1).$$

Đặt $\alpha = A-\frac{\pi}{4};\ \beta = B-\frac{\pi}{4};\ \gamma = C-\frac{\pi}{4}$.

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \ge -\cos(B + C) - \cos(C + A) - \cos(A + B)$

$\Leftrightarrow 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \ge -\cos\left(\beta+\gamma+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\gamma+\beta+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \ge \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta)$

$\Leftrightarrow (\sin\alpha + \sin\beta) + (\sin\beta + \sin\gamma) + (\sin\gamma + \sin\alpha)$

$\ge \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta + \sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma$

$\Leftrightarrow (\sin\alpha + \sin\beta)(1 - \cos\gamma) + (\sin\beta + \sin\gamma)(1 - \cos\alpha)$

$+ (\sin\gamma + \sin\alpha)(1 - \cos\beta) \ge 0 \qquad (2)$

Ta có: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{A-B}{2}$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}.$$

Do ABC là tam giác không có góc tù nên $0 \le \frac{\pi}{4}-\frac{C}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow (\sin\alpha + \sin\beta)(1 - \cos\gamma) \ge 0. \qquad (3)$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}=0\\ \cos\gamma=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C=\frac{\pi}{2}\\ C=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$

Lập luận tương tự có: $(\sin\beta + \sin\gamma)(1 - \cos\alpha) \ge 0 \quad (4)$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=\frac{\pi}{2}\\ A=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$

$(\sin\gamma + \sin\alpha)(1 - \cos\beta) \ge 0 \qquad (5)$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B=\frac{\pi}{2}\\ B=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$

Từ (3) (4) (5) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4), (5)

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông.

Nhận xét: Giả thiết ABC là tam giác không có góc tù thực sự là cần thiết. Thật vậy xét ΔABC với $A = 120^0$; $B = C = 30^0$. Khi đó

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1} < 1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Do ABC là tam giác không có góc tù, nên có

$\cos A\cos B\cos C \ge 0$

$\Rightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C) \ge 2$

$\Rightarrow \sin^2A + \sin^2B \ge 2 - \sin^2C. \qquad (1)$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông.

Ta lại có:

$\sin A\sin B \ge \sin A\sin B - \cos A\cos B \qquad$ (do $\cos A\cos B \ge 0$)

$\Rightarrow \sin A\sin B \ge -\cos*A + B) = \cos C$

$\Rightarrow \sin^2A\sin^2B \ge 1 - \sin^2C. \qquad (2)$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \cos A\cos B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=90^0\\ B=90^0.\end{array}\right.$

Từ (1) (2) có $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B) \ge 1 + 1 - \sin^2C + 2 - \sin^2C$

$\Rightarrow (1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B) \ge 2(2 - \sin^2C) \quad (3)$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=90^0\\ B=90^0.\end{array}\right.$

Từ (3) suy ra $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) \ge 2(2 - \sin^2C)(1 + \sin^2C)$

hay $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) \ge 2(2 + \sin^2C - \sin^4C) \quad (4)$.

Do $\sin^2C - \sin^4C = \sin^2C(1 - \sin^2C) \ge 0$ và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow C = 90^0$

nên từ (4) có: $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) \ge 4 \quad (5)$.

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4)

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}A=90^0\\ B=90^0\\ C=90^0.\end{array}\right. \qquad (6)$

Vì (6) không thể xảy ra (vì trong tam giác không thể có quá 1 gốc vuông)

Vậy trong (5) không thể có dấu bằng, tức là

$(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) \ge 4.$

Đó là đpcm.

Nhận xét: Giả thiết ABC không có góc tù là thực sự cần thiết

Thật vậy xét ΔABC có $A = 120^0$; $B = C = 30^0$

Khi đó $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) = \left(1+\frac{3}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{175}{64} < 4$.

4. Vì ABC là tam giác không có góc tù nên

$\cos A \ge 0, \cos B \ge 0, \cos C \ge 0$.

Ta có: $\dfrac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 4\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)(\cot A\cot B)$.

Từ đó theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}} \le \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sqrt{3}\cot A\cot B}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cot A\cot B$$

Như thế bằng lập luận tương tự, đi đến

$$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A)$$

Do $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1 \Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Điều kiện ABC là tam giác không có góc tù là thực sự cần thiết vì nến chẳng hạn $A > 90^0 \Rightarrow \cos A < 0, \cos B > 0, \cos C > 0$

$\Rightarrow$ các biểu thức $\sqrt{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}$ và $\sqrt{\dfrac{\cos C\cos A}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}$ không có nghĩa!

Bài 5. Cho ABC là tam giác nhọn. Chứng minh rằng

1. $\tan^2A + \tan^2B + \tan^2C \ge 0$.
2. $\tan^5A + \tan^5B + \tan^5C \ge 9\tan A\tan B\tan C$.
3. $\left(\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} - a\right)\left(\dfrac{c}{\cos C} + \dfrac{a}{\cos A} - b\right)\left(\dfrac{a}{\cos A} + \dfrac{b}{\cos B} - c\right) \ge 27abc$.
4. $\dfrac{\tan^2 A}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{\tan^2 B}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{\tan^2 C}{\sin\frac{C}{2}} \ge 18$.

Giải

1. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$\tan^2A + \tan^2B + \tan^2C \ge 3\sqrt[3]{\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C}$. (1)

Ta có vì ABC không phải là tam giác vuông

$\tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C$. (2)

Do ABC là tam giác nhọn nên ta có $\tan A > 0$, $\tan B > 0$, $\tan C > 0$, vậy lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$. (3)

Từ (2) (3) có $\tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$

$\Rightarrow (\tan A\tan B\tan C)^3 \ge 27\tan A\tan B\tan C$.

Do $\tan A\tan B\tan C > 0$ nên suy ra $\tan^2A\tan^2B\tan^2C \ge 27$. (4)

Từ (1) (4) đi đến đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Giả thiết ABC là tam giác nhọn là thực sự cần thiết vì

- Nếu ABC là tam giác vuông chẳng hạn $A = 90^0$ thì tanA không có nghĩa.
- Nếu ABC là tam giác có góc tù, xét chẳng hạn ΔABC có $A = 120^0$; $B = C = 30^0$.

Khi đó $\tan^2A + \tan^2B + \tan^2C = \left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3 + \frac{2}{3} < 9$.

2. Theo bất đẳng thức Côsi ta có (do $\tan^5A$, $\tan^5B$, $\tan^5C$ đều > 0 vì A, B, C nhọn)

$\tan^5A + \tan^5B + \tan^5C \ge 3\tan A\tan B\tan C\sqrt[3]{\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C}$ (1)

Theo phần 1/ có $\tan^5A + \tan^5B + \tan^5C \ge 27$ (2)

Từ (1) (2) suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Giả thiết ABC là tam giác nhọn là thực sự cần thiết vì trước hết nó không thể là tam giác vuông, còn nếu ABC có một góc tù khi đó xét phản ví dụ sau: Lấy $A = 120^0$; $B = C = 30^0$

$$\Rightarrow \tan^5A + \tan^5B + \tan^5C = \left(-\sqrt{3}\right)^5 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 = -9\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{27}$$

$$9\tan A\tan B\tan C = -9\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = -3\sqrt{3}.$$

Do $-9\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{27} < -3\sqrt{3}$ vậy bất đẳng thức không đúng.

3. Ta có:

$$\left(\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} - a\right)\left(\frac{c}{\cos C} + \frac{a}{\cos A} - b\right)\left(\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} - c\right) \ge 27abc \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}-\sin A\right)\left(\frac{\sin C}{\cos C}+\frac{\sin A}{\cos A}-\sin B\right)\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}-\sin C\right)$$
$$\geq 27\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sin A}{\cos B}\cos C-\sin A\right)\left(\frac{\sin B}{\cos C\cos A}-\sin B\right)\left(\frac{\sin C}{\cos A\cos B}-\sin C\right)$$
$$\geq 27\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}\cdot\frac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\cdot\frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}\geq 27 \quad (2)$$

(do $\sin A>0$, $\sin B>0$, $\sin C>0$).

Đặt $x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, z=\tan\frac{C}{2}$.

Do A, B, C là các góc nhọn nên $0<x<1, 0<y<1, 0<z<1$

Ta có: $\cos A=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $\cos B=\frac{1-y^2}{1+y^2}$; $\cos C=\frac{1-z^2}{1+z^2}$

Vậy

$$(2)\Leftrightarrow\frac{1-\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}}{\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}}\cdot\frac{1-\frac{(1-y^2)(1-z^2)}{(1+y^2)(1+z^2)}}{\frac{(1-y^2)(1-z^2)}{(1+y^2)(1+z^2)}}\cdot\frac{1-\frac{(1-z^2)(1-x^2)}{(1+z^2)(1+x^2)}}{\frac{(1-z^2)(1-x^2)}{(1+z^2)(1+x^2)}}\geq 27$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(x^2+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}\cdot\frac{2(y^2+z^2)}{(1-y^2)(1-z^2)}\cdot\frac{2(z^2+x^2)}{(1-z^2)(1-x^2)}\geq 27. \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cô si có:

$$\text{VT }(3)\geq\frac{4xy}{(1-x^2)(1-y^2)}\cdot\frac{4yz}{(1-y^2)(1-z^2)}\cdot\frac{4zx}{(1-z^2)(1-x^2)}$$

hay VT (3) ≥ $\tan A\tan B.\tan B\tan C.\tan C\tan A$

$\Rightarrow$ VT (3) ≥ $\tan^2A\tan^2B\tan^2C$. (4)

Theo các bài trên có: $\tan^2A\tan^2B\tan^2C\geq 27$ (5)

Từ (4) (5) suy ra (3) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

Rõ ràng điều kiện ABC là tam giác nhọn là cần thiết

Các bạn hãy tự giải thích lấy vì sao?

4. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{\tan^2A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2C}{\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}. \quad (1)$$

Do A, B, C nhọn nên $\tan A>0$, $\tan B>0$, $\tan C>0$, vậy theo bất đẳng thức Côsi có:

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}=3\sqrt[3]{\tan A+\tan B+\tan C}$$

$\Rightarrow\tan A+\tan B+\tan C\geq 3.$ (2)

Lại có theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác

$$0<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2} \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra $\frac{\tan^2A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2C}{\sin\frac{C}{2}}\geq 18$.

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Giả thiết ABC là tam giác nhọn là cần thiết và trước hết tanA, tanB, tanC có nghĩa khi A, B, C không phải là góc vuông. Nếu ABC là tam giác có góc tù, chẳng hạn xét ΔABC với $A=120^0$, $B=C=30^0$, ta có:

$$\tan A=-\sqrt{3};\ \tan B=\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}=\sin 15^0=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Lúc đó $\frac{\tan^2A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2C}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3.\sqrt{2-\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}<18$

Vậy bất đẳng thức không còn đúng nữa!

Bài 6. (Bất đẳng thức W.I.Gridasov)

Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ta có:

$$\tan A\tan B\tan C\sin A\sin B\sin C\geq\frac{27}{8}.$$

Giải

Do $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$, nên

$$P=\tan A\tan B\tan C\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{4}\tan A\tan B\tan C(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{2\cos A\cos B\cos C}(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^2 A\tan B\tan C + \sin^2 B\tan C\tan A + \sin^2 C\tan A\tan B\right). \qquad (1)$$

Do A, B, C đều là góc nhọn nên tanA > 0, tanB > 0, tanC > 0, vậy từ (1) và theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$P \geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C}, \text{ tức là } P \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{P^2}$$

$$\Rightarrow P^3 \geq \frac{27}{8}P^2 \Rightarrow P \geq \frac{27}{8} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Rõ ràng nếu ABC là tam giác vuông chẳng hạn $A = 90^0$ thì tanA không có nghĩa, còn nếu ABC là tam giác có góc tù chẳng hạn $A > 90^0$ khi đó B, C là góc nhọn nên tanA < 0, tanB > 0, tanC > 0 còn rõ ràng sinAsinBsinC > 0 $\Rightarrow P < 0$ vậy không thể có $P \geq \frac{27}{8}$.
2. Bất đẳng thức W.I.Gridasov được công bố lần đầu tiên trên tạp chí "Matematyka" (Warszawa) $N^0$32 – 1972 trang 308 – 309
3. Ta có thể viết lại bất đẳng thức W.I.Gridasov dưới dạng sau:

$$\tan A\tan B\tan C \geq \frac{27}{8\sin A\sin B\sin C}, \text{ hay } \tan A + \tan B + \tan C \geq \frac{27}{8\sin A\sin B\sin C}.$$

Rõ ràng trong mọi tam giác ta có: $0 < \sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$$\Rightarrow \frac{27}{8\sin A\sin B\sin C} \geq 3\sqrt{3}.$$

Vậy bất đẳng thức W.I.Gridasov là tốt hơn kết qua quen biết sau:

Trong mọi tam giác nhọn, ta có: $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

Bài 7. (Bất đẳng thức T.Ono và F.Balitrand)

Cho ABC là tam giác không nhọn, chứng minh rằng:

$27(b^2 + c^2 - a^2)^2(a^2 + c^2 - b^2)^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 \leq 4^6S^6$.

Giải

* Xét khi ABC là tam giác nhọn

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có:

$$27(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 \leq 4^6S^6 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 27(2bc\cos A)^2(2ac\cos B)^2(2ab\cos C)^2 \leq 4^6(2R^2\sin A\sin B\sin C)^2$$

$$\Leftrightarrow 64.27(abc)^4\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C \leq 4^6.2^6R^{12}\sin^6 A\sin^6 B\sin^6 C$$

$$\Leftrightarrow 64.27.8^4R^{12}\sin^4 A\sin^4 B\sin^4 C\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C \leq 4^6.2^6R^{12}\sin^6 A\sin^6 B\sin^6 C$$

$$\Leftrightarrow 27\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C \leq \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C \geq 27 \qquad (2)$$

Do ABC là tam giác nhọn, nên (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

* Khi ABC là tam giác vuông chẳng hạn $A = 90^0 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0$ $\Rightarrow VT = 0 \Rightarrow$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Vậy bất đẳng thức đã cho là đúng. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét: Bất đẳng thức nói trên được nhà toán học T.Ono đưa ra lần đầu tiên vào năm 1914 trên tạp chí "Intermed.Math", $N^0$21, 1914 trang 146 dưới dạng giả thiết: Liệu bất đẳng thức trên có đúng với mọi tam giác không?

Vào năm 1915 nhà toán học F.Balitrand đã chỉ ra rằng bất đẳng thức trên đúng với mọi tam giác không nhọn và cũng cho phản ví dụ nó có thể không đúng nếu ABC là tam giác có góc tù (liệu các bạn độc giả có tìm được ví dụ nào hay không?). Vì lẽ đó bất đẳng thức này có tên hai người: Bất đẳng thức T.Ono và F.Balitrand".

Bài 8. (Bất đẳng thức A.W.Walker)

Cho ABC là tam giác không có góc tù. Chứng minh rằng:

$p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$.

Giải

Ta có: $p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4Rr - r^2 \geq 2R^2 + 4Rr + 2r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2} \geq \frac{R^2 + 2Rr + r^2}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2} \geq \left(\frac{R + r}{R}\right)^2. \qquad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ (xem phần đẳng thức lượng giác trong tam giác), ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq (2R\cos A + 2R\cos B + 2R\cos C)^2. \quad (2)$$

Xét hai khả năng sau:

1. Nếu ABC là tam giác vuông tại (tại A chẳng hạn)

$$(2) \Leftrightarrow 2a^2 \geq 4R^2(\cos B + \cos C)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 \geq a^2(\cos B + \sin B)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 1 + 2\sin B\cos B$$

$$\Leftrightarrow \sin 2B \leq 1. \qquad (3)$$

Do (3) đúng nên (2) đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow B = 45^0$

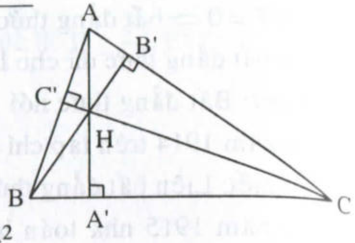
⇔ ABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

2. Nếu ABC là tam giác nhọn

Gọi H là trực tâm ΔABC. Ta có: $HA = 2R\cos A$, $HB = 2R\cos B$, $HC = 2R\cos C$.

Vậy (2) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq (AH + BH + CH)^2$. (3)

Ta có: $AH.AA' = AC'.AB = cb\cos A = \dfrac{a^2+c^2-a^2}{2}$



Tương tự $BH.BB' = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}$,

$$CH.CC' = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Vậy $AH.AA' + BH.BB' + CH.CC' = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Theo định lí XeVa, có: $\dfrac{A'H}{A'A} + \dfrac{B'H}{B'B} + \dfrac{C'H}{C'C} = 1$

$$\frac{AH}{A'A} + \frac{BH}{B'B} + \frac{CH}{C'C} = 2 \qquad (4)$$

ÁP dụng bất đẳng thức Bunhiacopski kết hợp với (4), ta có:

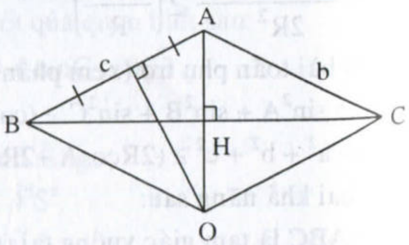
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.2 \geq (AH+BH+CH)^2 \Rightarrow (3) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Bất đẳng thức A.W.Walker lần đầu tiên được tác giả công bố trên tạp chí Amer.Math, $N^0 79$, 1972 trang 1135
2. Xét khi ABC có góc tù, chẳng hạn xét khi $A = 120^0$; $B = C = 30^0$

Ta có: $b = c = \dfrac{BH}{\cos 30^0} = \dfrac{a}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.



Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{5}{3}a^2$

Ta có: $R = OA = AB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Vậy $(2R\cos A + 2R\cos B + 2R\cos C)$

$$= 4R^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3}(2\sqrt{3}-1)^2 = \frac{a^2}{3}(13-4\sqrt{3})$$

Rõ ràng $13 - 4\sqrt{3} > 5$ (vì $\Leftrightarrow 2 > \sqrt{3}$).

Vậy ta có: $a^2 + b^2 + c^2 < (2R\cos A + 2R\cos B + 2R\cos C)^2$ tức là (2) không đúng

Do đó giả thiết ABC là tam giác không có góc tù là thực sự cần thiết.

Bài 9. Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ta có các bất đẳng thức sau:

1. $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \leq \dfrac{1}{2R^2}\left(2R^2 + 4Rr + r^2 + \dfrac{4S^2}{27R^2}\right)$.
2. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \dfrac{4S^2}{27R^2}$.
3. $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C \leq \dfrac{S}{4R^3r}\left(4R^2 - 2Rr - 2r^2 + \dfrac{8S^2}{27R^2}\right)$.
4. $(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \leq \dfrac{S}{2R^3r}\left((R+r)(2R+r) + \dfrac{4S^2}{27R^2}\right)$.
5. $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} \leq \dfrac{1}{S}\left(2R^2 + 4Rr + r^2 + \dfrac{4R^2}{27R^2}\right)$.
6. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin C} + \dfrac{\sin B + \sin C}{\sin A} + \dfrac{\sin C + \sin A}{\sin B} \leq \dfrac{1}{Rr}\left(2R^2 + Rr + r^2 + \dfrac{4S^2}{27R^2}\right)$.
7. $\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \leq \dfrac{2S^2}{27R^4}$.
8. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 1 - \dfrac{4S^2}{27R^4}$.
9. $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} \geq \dfrac{27R^3(R+r)}{2S^2}$.
10. $\cot A + \cot B + \cot C \leq \dfrac{1}{S}\left(2R^2 + \dfrac{4S^2}{27R^2}\right)$.
11. $\cot A\cot B\cot C \leq \dfrac{4S}{27R^2}$.
12. $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \leq \dfrac{1}{S^2}\left(2R^2 + \dfrac{4S^2}{27R^2}\right)^2 - 2$.
13. $(\tan A + \tan B)(\tan B + \tan C)(\tan C + \tan A) \geq \left(\dfrac{9R^2}{2S}\right)^3$.
14. $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2\dfrac{B}{2} + \tan^2\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{8R^2 - r^2 - \dfrac{16S^2}{27R^2}}{(2R+r)^2 + \dfrac{8S^2}{27R^2}}$.
15. $\cot^2\dfrac{A}{2} + \cot^2\dfrac{B}{2} + \cot^2\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{r^2}\left(4R^2 - 4Rr - r^2 + \dfrac{8S^2}{27R^2}\right)$.

16. $\cot^3\frac{A}{2}+\cot^3\frac{B}{2}+\cot^3\frac{C}{2}\le\frac{S}{r^4}\left(2R^2-8Rr+r^2+\frac{4S^2}{27R^2}\right)$.

17. $\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{1}{8R^2}\left(10R^2+6Rr+r^2+\frac{4S^2}{27R^2}\right)$.

18. $\cos2A+\cos2B+\cos2C\ge-1-\frac{8S^2}{27R^4}$.

19. $\sin^4\frac{A}{2}+\sin^4\frac{B}{2}+\sin^4\frac{C}{2}\ge\frac{1}{8R^2}\left(4R^2-4Rr-\frac{8S^2}{27R^2}\right)$.

20. $\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\ge\frac{1+(4R+r)^2}{(2R+r)^2+\frac{8S^2}{27R^2}}$.

21. $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\le\frac{2}{r^2}\left(2R^2-2Rr+r^2+\frac{4S^2}{27R^2}\right)$.

22. $\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}\ge\frac{8R(4R+r)}{(2R+r)^2+\frac{8S^2}{27R^2}}$.

23. $m_a^2+m_b^2+m_c^2\le6R^2+\frac{2S^2}{9R^2}$.

24. $l_al_bl_c\le\frac{8Rr^2\left((2R+r^2)+\frac{8S^2}{27R^2}\right)}{(R+r)(2R+r)+\frac{4S^2}{27R^2}}$.

25. $r_ar_br_c\le r(2R+r)^2+\frac{8rS^2}{27R^2}$.

26. $r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\le(2R+r)^2+\frac{8rS^2}{27R^2}$.

27. $r_a+r_b+r_c\ge8R^2-r^2-\frac{16S^2}{27R^2}$.

28. $r_a^3+r_b^3+r_c^3\ge16R^3+r^3-\frac{32S^2}{9R}$.

29. $\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\le\frac{1}{S^2}\left(4R^2-4Rr-r^2+\frac{8S^2}{27R^2}\right)$.

30. $\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_br_c}+\frac{1}{r_cr_a}\ge\frac{4R+r}{r(2R+r)^2+\frac{8rS^2}{27R^2}}$.

31. $h_a+h_b+h_c\le\frac{1}{R}\left(2R^2+4Rr+r^2+\frac{4S^2}{27R^2}\right)$.

32. $h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a\le\frac{2r}{R}\left((2R+r)^2+\frac{8S^2}{27R^2}\right)$.

33. $h_ah_bh_c\le\frac{2r^2}{R}\left((2R+r)^2+\frac{8S^2}{27R^2}\right)$.

34. $\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}\le\frac{1}{2S^2}\left(2R^2+4Rr+r^2+\frac{8S^2}{27R^2}\right)$.

35. $\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\le\frac{1}{S^2}\left(2R^2+\frac{4S^2}{27R^2}\right)$.

Giải

Trước hết chú ý rằng bất đẳng thức W.I.Gridasov (xem bài 6) có thể viết lại dưới dạng sau: Trong mọi tam giác nhọn, ta có:

$$p^2-(2R+r)^2\le\frac{8S^2}{27R^2}\quad(*)$$

Thật vậy theo bài 6 ta có: $\tan A\tan B\tan C\ge\frac{27}{8\sin A\sin B\sin C}$.

Do $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C=\frac{2pr}{p^2-(2R+r)^2}=\frac{2S}{p^2-(2R+r)^2}$

$\sin A\sin B\sin C=\frac{S}{2R^2}$

(theo bài toán phụ trợ – xem phần đẳng thức lượng giác trong tam giác)

Từ đó ta có: $\frac{2S}{p^2-(2R+r)^2}\ge\frac{27R^2}{4S}\Rightarrow p^2-(2R+r)^2\le\frac{8S^2}{27R^2}$.

Vậy (*) được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh các bất đẳng thức trong bài.

1. Xét bất đẳng thức :

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\frac{1}{2R^2}\left(2R^2+4Rr+r^2+\frac{4S^2}{27R^2}\right).$$

Theo bài toán phụ trợ, ta có:

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \frac{p^2+4Rr+r^2}{4R^2}. \qquad (*)$$

Vì ABC là tam giác nhọn nên theo bất đẳng thức W.I.Gridasov, ta có:

$$p^2 \le (2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2}. \qquad (**)$$

Từ (*), (**) có:

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \frac{(2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2} + 4Rr + r^2}{4R^2} \text{ hay}$$

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \frac{1}{2R^2}\left(2R^2 + 4Rr + r^2 + \frac{4S^2}{27R^2}\right).$$

Vậy (1) được chứng minh: Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

2. Xét bất đẳng thức:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le 2 + \frac{4S^2}{27R^4} \qquad (2)$$

Theo bài toán phụ trợ, ta có: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{p^2-4Rr-r^2}{2R^2}$ (*)

Theo bất đẳng thức W.I.Gridasov thì $p^2 \le (2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2}$. (**)

Từ (*) và (**) có $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{(2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2} - 4Rr - r^2}{4R^2}$

hay $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le 2 + \frac{4S^2}{27R^4}$.

Vậy (2) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

1. Như trên đã thấy: $\frac{4S^2}{27R^2} \le \frac{\sqrt{3}S}{9}$

Vì thế từ phần 2/ ta có: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le 2 + \frac{\sqrt{3}S}{9R^2}$ (2')

2. Ta lại thấy: $\frac{S}{R^2} = 2\sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(Dựa vào bất đẳng thức quen biết:

Trong mọi tam giác ABC thì $\sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Vì thế ta lại có: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$. (2'')

Như vậy chú ý rằng: $\frac{4S^2}{27R^4} \le \frac{\sqrt{3}.S}{9R^2} \le \frac{1}{4}$.

Vì thế bất đẳng thức trong phần 2/ là tốt hơn bất đẳng thức (2') và càng tốt hơn bất đẳng thức (2''). Lưu ý rằng bất đẳng thức (2'') là rất thông dụng.

3. Do đó ta thấy việc xét các bất đẳng thức trong bài trên là hợp lý và hoàn toàn có ý nghĩa.

3 – 9. Chứng minh hoàn toàn tương tự.

10. Xét bất đẳng thức

$$\cot A + \cot B + \cot C \le \frac{1}{S}\left(2R^2 + \frac{4S^2}{27R^2}\right). \qquad (10)$$

Theo bài toán phụ trợ, ta có: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2S}$. (*)

Từ (*) và bất đẳng thức W.I.Gridasov, suy ra

$$\cot A + \cot B + \cot C \le \frac{(2R+r) + \frac{8S^2}{27R^2} - r^2 - 4rR}{2S}, \text{ hay}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C \le \frac{1}{S}\left(2R^2 + \frac{4S^2}{27R^2}\right)$$

Vậy (1) được chứng minh và dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

11 – 13. Chứng minh tương tự.

14. Xét bất đẳng thức

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \ge \frac{8R^2 - r^2 - \frac{16S^2}{27R^2}}{(2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2}}. \qquad (14)$$

Theo bài toán phụ trợ thì $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2}$ (*).

Do $p^2 \le (2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2}$, vậy từ (*) suy ra

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \ge \frac{(4R+r)^2 - 2\left[(2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2}\right]}{(2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2}}$$

hay $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\ge \dfrac{8R^2-r^2-\dfrac{16S^2}{27R^2}}{(2R+r)^2+\dfrac{8S^2}{27R^2}}$.

Vậy (14) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Nhận xét:

Do $\dfrac{4S^2}{27R^2}\le\dfrac{\sqrt{3}S}{9}$

Vì thế từ 14/ suy ra $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\ge \dfrac{8R^2-r^2-\dfrac{4\sqrt{3}S}{9R^2}}{(2R+r)^2+\dfrac{2\sqrt{3}S}{9R^2}}$.

Bây giờ ta chứng minh rằng $\dfrac{8R^2-r^2-\dfrac{4\sqrt{3}S}{9R^2}}{(2R+r)^2+\dfrac{2\sqrt{3}S}{9R^2}}\ge 1.$ (**)

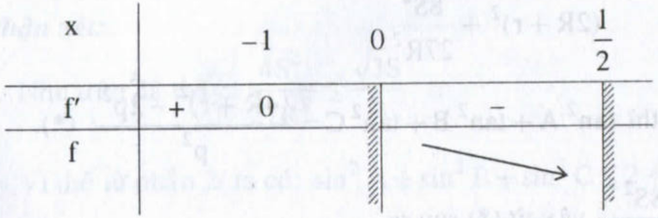
Thật vậy (**) $\Leftrightarrow 8R^2-r^2-\dfrac{4\sqrt{3}S}{9R^2}\ge 4R^2+4Rr+r^2+\dfrac{2\sqrt{3}S}{9}$

$$\Leftrightarrow 2R^2-2Rr-r^2\ge\frac{\sqrt{3}S}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2-2\left(\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r}{R}\right)^2\ge\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\sin C. \quad (***)$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 - 2x + 2$, với $0<x\le\dfrac{1}{2}$

Ta có: $f'(x) = -2x - 2$



Vì $0<\dfrac{r}{R}\le\dfrac{1}{2}$ (quá hiển nhiên), nên ta có: $f\left(\dfrac{r}{R}\right)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

hay $2-2\left(\dfrac{r}{R}\right)-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\ge\dfrac{3}{4}$. (****)

Mặt khác do $\sin A\sin B\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, nên $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\sin C\le\dfrac{3}{4}$ (*****).

Từ (****) và (*****) suy ra (***) đúng, tức (**) đúng

Như đã biết trong mọi tam giác ta có: $\tan^2\dfrac{A}{2}+\tan^2\dfrac{B}{2}+\tan^2\dfrac{C}{2}\ge 1$ (14’’)

Từ các lập luận trên suy ra (14) tốt hơn (14’) và càng tốt hơn (14’’)

Như thế một lần nữa ta thấy tính hợp lí khi xét bài toán của chúng ta.

15 – 22. Chứng minh tương tự.

23. Xét bất đẳng thức

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2\le 6R^2+\frac{4S^2}{9R^2}.$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{3}{2}\left(p^2-r^2-4Rr\right).$$

Vì thế theo bất đẳng thức W.I.Gridasov suy ra

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2\le\frac{3}{2}\left[(2R+r)^2+\frac{8S^2}{27R^2}-r^2-4Rr\right]$$

hay $m_a^2+m_b^2+m_c^2\le 6R^2+\dfrac{4S^2}{9R^2}$.

Vậy (23) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

24. Xét bất đẳng thức

$$l_a l_b l_c\le\frac{8Rr^2\left((2R+r^2)+\dfrac{8S^2}{27R^2}\right)}{(R+r)(2R+r)+\dfrac{4S^2}{27R^2}}. \quad (24)$$

Theo bài toán phụ trợ thì $l_a l_b l_c\le\dfrac{16Rr^2p^2}{p^2+2Rr+r^2}$. (*)

Từ (*) vì áp dụng bất đẳng thức W.I.Gridasov suy ra

$$l_a l_b l_c\le\frac{16Rr^2\left((2R+r^2)+\dfrac{8S^2}{27R^2}\right)}{(2R+r)^2+\dfrac{4S^2}{27R^2}+r(2R+r)},\ \text{hay}\ l_a l_b l_c\le\frac{8Rr^2\left((2R+r^2)+\dfrac{8S^2}{27R^2}\right)}{(R+r)(2R+r)+\dfrac{4S^2}{27R^2}}$$

Vậy (24) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

25 – 35. Chứng minh tương tự.

Nhận xét:

1. 35 bất đẳng thức trên đều dựa vào bất đẳng thức W.I.Gridasov

$$p^2 \le (2R+r)^2 + \frac{8S^2}{27R^2}.$$

Vì thế có thể xem chúng là các hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức quan trọng này.

2. Các bạn hãy tự cho ví dụ chứng tỏ rằng giả thiết tam giác nhọn hoặc tam giác không có góc tù là thực sự cần thiết.

Bài 10. Chứng minh rằng trong một tam giác nhọn ta có các bất đẳng thức sau:

1. $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \ge \dfrac{R^2+6Rr+2r^2}{2R^2}$.

2. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \ge \dfrac{(R+r)^2}{R^2}$.

3. $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C \ge \dfrac{p(R+r)}{R^2}$.

4. $(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \ge \dfrac{p}{2R^3}\left(R^2+5Rr+2r^2\right)$.

5. $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} \ge \dfrac{R^2+6Rr+2r^2}{S}$.

6. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C} + \dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A} + \dfrac{\sin C+\sin A}{\sin B} \le \dfrac{R^2+3Rr+2r^2}{Rr}$.

7. $\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \ge \dfrac{2Rr+r^2-R^2}{2R^2}$.

8. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \le \dfrac{1}{R^2}\left(2R^2-2Rr-r^2\right)$.

9. $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \le \dfrac{4R^3+3R^2r-9R^2r-4r^3}{2R^3}$.

10. $\cot A + \cot B + \cot C \ge \dfrac{(R+r)^2}{pr}$.

11. $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2\dfrac{B}{2} + \tan^2\dfrac{C}{2} \le \dfrac{12R^2-4Rr-5r^2}{2R^2+8Rr+3r^2}$.

12. $\cot^2\dfrac{A}{2} + \cot^2\dfrac{B}{2} + \cot^2\dfrac{C}{2} \ge \dfrac{2R^2+r^2}{r^2}$.

13. $\cot^3\dfrac{A}{2} + \cot^3\dfrac{B}{2} + \cot^3\dfrac{C}{2} \ge \dfrac{p\left(2R^2-4Rr+3r^2\right)}{r^3}$.

---

14. $\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}\sin^2\dfrac{A}{2} \ge \dfrac{R^2+2r^2}{16R^2}$.

15. $\sin^4\dfrac{A}{2} + \sin^4\dfrac{B}{2} + \sin^4\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3R^2-4Rr+2r^2}{4R^2}$.

16. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \le \dfrac{R^2-4Rr-2r^2}{R^2}$.

17. $\dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\frac{C}{2}} \le \dfrac{(4R+r)^2}{2R^2+8Rr+3r^2}$.

18. $\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge 4 + \dfrac{2R^2}{r^2}$.

19. $\dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} + \dfrac{1}{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}} \le \dfrac{8R(4R+r)}{2R^2+8Rr+3r^2}$

20. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \ge 3(R+r)^2$.

21. $l_a l_b l_c \ge \dfrac{8Rr^2\left(2R^2+8Rr+3r^2\right)}{R^2+5Rr+2r^2}$.

22. $r_a r_b r_c \ge r\left(2R^2+8Rr+3r^2\right)$.

23. $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a \ge 2R^2+8Rr+3r^2$.

24. $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \le 12R^2-4Rr-5r^2$.

25. $r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 \le 40R^3-48R^2r+r^3$.

26. $\dfrac{1}{r_a^2} + \dfrac{1}{r_b^2} + \dfrac{1}{r_c^2} \ge \dfrac{2R^2+r^2}{r^2\left(2R^2+8Rr+3r^2\right)}$.

27. $\dfrac{1}{r_a^2 r_b^2} + \dfrac{1}{r_b^2 r_c^2} + \dfrac{1}{r_c^2 r_a^2} \ge \dfrac{4R+r}{r\left(2R^2+8Rr+3r^2\right)}$.

28. $h_a + h_b + h_c \ge \dfrac{1}{R}\left(R^2+6Rr+2r^2\right)$.

29. $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \ge \dfrac{2r}{R}\left(2R^2+8Rr+3r^2\right)$.

Giải

Chứng minh các hệ thức này bằng cùng một phương pháp là kết hợp bài toán phụ trợ với bất đẳng thức A.W.Walker.

Lấy ví dụ ta xét phần 19/.

Xét bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}\le\frac{8R(4R+r)}{2R^2+8Rr+3r^2}\qquad(19)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{8r(4R+r)}{p^2}.$$

Theo bất đẳng A.W.Walker thì $p^2\ge 2R^2+8Rr+3r^2$

Từ đó suy ra (19) đúng. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều (ở đây xét trong lớp các tam giác nhọn).

Nhận xét:

1. Ở đây đóng vai trò nổi bật là bất đẳng thức A.W.Walker. Có thể xem 29 bất đẳng thức trên là các hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức này.
2. Bạn đọc hãy cho ví dụ để thấy rằng các giả thiết ABC là tam giác nhọn hoặc không có góc tù là cần thiết.

Bài 10. Cho ABC là tam giác không có góc tù. Chứng minh:

$$\frac{a^2\cos A}{bc}+\frac{b^2\cos B}{ca}+\frac{c^2\cos C}{ab}\le\frac{3}{2}.$$

Giải

Ta có: $\dfrac{a^2\cos A}{bc}+\dfrac{b^2\cos B}{ca}+\dfrac{c^2\cos C}{ab}\le\dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4S}\left(a^2\sin 2A+b^2\sin 2B+c^2\sin 2C\right)\le\frac{3}{2}\qquad(1)$$

Do vai trò bình đẳng có thể giả sử $A\ge B\ge C\Rightarrow a^2\ge b^2\ge c^2$. (2)

Do ABC là tam giác không có góc tù, nên $B+C\ge\frac{\pi}{2}$, mà $B\ge C\Rightarrow B\ge\frac{\pi}{4}$.

Ta có $A\ge B\Rightarrow 2A\ge 2B$

$\Rightarrow 0\le\pi-2A\le\pi-2B\le\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\sin(\pi-2A)\le\sin(\pi-2B)$

$\Rightarrow\sin 2A\le\sin 2B.$

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu $C\ge\frac{\pi}{4}$, thì do $B\ge C\Rightarrow 0<\pi-2B\le\pi-2C\le\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\sin(\pi-2B)\le\sin(\pi-2C)$

$\Rightarrow\sin 2B\le\sin 2C.$

---

2. Nếu $C<\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2C\le\frac{\pi}{2}$

Ta có: $0<\pi-2B\le 2C<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\sin 2B\le\sin 2C.$

Tóm lại ta đã chứng minh được $\sin 2A\le\sin 2B\le\sin 2C$. (3)

Từ (2), (3) và theo bất đẳng thức Trêbơsep, ta có:

$$3\left(a^2\sin 2A+b^2\sin 2B+c^2\sin 2C\right)\le\left(a^2+b^2+c^2\right)(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

hay $a^2\sin 2A+b^2\sin 2B+c^2\sin 2C\le\frac{4}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\sin A\sin B\sin C$

$$\Rightarrow\frac{1}{4S}\left(a^2\sin 2A+b^2\sin 2B+c^2\sin 2C\right)$$

$$\le\frac{4.4R^2\left(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\right)\sin A\sin B\sin C}{3.4.2R^2\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4S}\left(a^2\sin 2A+b^2\sin 2B+c^2\sin 2C\right)\le\frac{2}{3}\left(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\right)(4)$$

Theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác, ta có:

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4}\qquad(5)$$

Từ (4) (5) suy ra (1) đúng. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều

Đó là đpcm.

Nhận xét: Bạn đọc hãy cho ví dụ để thấy rằng giả thiết ABC là tam giác không có góc tù là cần thiết.

Bài 11. Cho ABC là tam giác nhọn. Chứng minh:

$$\tan A+\tan B+\tan C+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\ge\frac{28\sqrt{3}}{9}$$

Giải

Vì ABC là tam giác nhọn, nên ta có:

$\tan A+\tan B+\tan C\ge\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$ (xem chứng minh bài 1 phần này)

Lại có $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\dfrac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}=\dfrac{1}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}.$

Vậy

$$\tan A+\tan B+\tan C+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\ge \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\frac{1}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}. \quad (1)$$

Rõ ràng trong mọi tam giác ta có: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$ (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra ⇔ ABC là tam giác đều.

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x}$ với $x\ge\sqrt{3}$.

Ta có: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}>0$ khi $x\ge\sqrt{3}$.

Vậy f(x) là hàm đồng biến khi $x\ge 3\sqrt{3}$. Vì thế từ (2) có:

$$f\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\ge f(3\sqrt{3})=3\sqrt{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{28\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\frac{1}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}\ge\frac{28\sqrt{3}}{9} \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra

$$\tan A+\tan B+\tan C+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\ge\frac{28\sqrt{3}}{9}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Nhận xét: Rõ ràng ABC không thể là tam giác vuông vì nếu chẳng hạn $A=90^0$ thì tanA không có nghĩa.

* Xét ΔABC với $A=120^0; B=C=30^0$

Khi đó $\tan A=-\sqrt{3}; \tan B=\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lại có $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{3}; \tan\frac{B}{2}=\tan\frac{C}{2}=\tan 15^0=2-\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{3}\left(7-4\sqrt{3}\right)=7\sqrt{3}-12$$

$$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{20\sqrt{3}}{3}-12<0.$$

Vậy không thể có bất đẳng thức theo yêu cầu.

Như vậy giả thiết ABC là tam giác nhọn là thực sự cần thiết!

Bài 12. Cho ABC là tam giác không có góc tù

Chứng minh: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\ge\frac{10\sqrt{3}}{9}$.

Giải

Đặt $x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, z=\tan\frac{C}{2}$, thì

$0<x\le 1, 0<y\le 1, 0<z\le 1.$

Hiển nhiên theo hệ thức lượng trong tam giác và bất đẳng thức lượng giác cơ bản, ta có:

$xy+yz+zx=1$ (1)

$x+y+z=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$ (2)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$(1-x)(1-y)(1-z)\le\left[\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{3}\right]^3$$

$$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z)\le\left(1-\frac{x+y+z}{3}\right)^3\le\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3. \quad (3)$$

Lại có:

$$(1-x)(1-y)(1-z)=1+(xy+yz+zx)-(x+y+z)-xyz$$
$$=2-(x+y+z+xyz).$$

Từ đó có: $x+y+z+xyz=2-(1-x)(1-y)(1-z).$ (4)

Từ (3) (4) có $x+y+z+xyz\ge 2-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{10\sqrt{3}}{9}$.

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

C. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác không nhọn

Tam giác không nhọn là tam giác có $\max\{A, B, C\} \ge 90^0$.

Trong mục này ta sẽ xét các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác không nhọn.

Bài 1. (Bất đẳng thức A.Emmerich)

Cho ABC là tam giác không nhọn. Chứng minh: $R \ge (\sqrt{2}+1)r$.

Giải

Không giảm tổng quát giả sử $\max\{A, B, C\} = A \Rightarrow A \ge \dfrac{\pi}{2}$

(do ABC là tam giác không nhọn). Ta có:

$$R \ge (\sqrt{2}+1)r \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} \ge \sqrt{2}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \ge \sqrt{2}+1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 1 \le \sqrt{2} \qquad (2)$$

Lại có VT (2) $\le -2\sin^2\dfrac{A}{2} + 2\sin\dfrac{A}{2} + 1$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow B = C$.

Xét hàm số $f(x) = -2x^2 + 2x + 1$ với $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le x < 1$

$$\left(\text{do } A \ge \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\frac{A}{2} < 1\right)$$

Ta có: $f'(x) = -4x + 2$ và có bảng biến thiên sau:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
f′(x)	0		▨	−	▨
f(x)			▨	↘	▨

Từ bảng biến thiên suy ra: VP (3) $= f\left(\sin\dfrac{A}{2}\right) \le f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

Vậy từ (2) (3) suy ra (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

Nhận xét:

1. Bất đẳng thức A.Emmerich lần đầu tiên được đưa ra trong tạp chí "Zeit.math natuzwiss. Unterricht" $N^0$26, 1895. Bất đẳng thức này có thể xem là bất đẳng thức cơ bản với tam giác không nhọn.
2. Chú ý giả thiết ABC là tam giác không nhọn là thực sự cần thiết. Nếu ABC là tam giác nhọn thì kết luận của bài toán chưa chắc đúng. Thật vậy giả sử nếu ABC là tam giác đều, khi đó $R = 2r \Rightarrow R < (\sqrt{2}+1)r$.

Bài 2. Cho ABC là tam giác không nhọn. Chứng minh: $p \le (\sqrt{2}+1)R$.

Giải

Giả sử $\max\{A; B; C\} = A \Rightarrow A \ge \dfrac{\pi}{2}$.

Ta có $p \le (\sqrt{2}+1)R$ (1)

$$\Leftrightarrow R(\sin A + \sin B + \sin C) \le (\sqrt{2}+1)R$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le \sqrt{2}+1$$

$$\Leftrightarrow \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le \sqrt{2}+1$$

$$\Leftrightarrow \sin A + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le \sqrt{2}+1. \qquad (2)$$

Rõ ràng ta có: $\sin A \le 1$ (3)

Vì $0 < \cos\dfrac{B-C}{2} \le$ còn do $\dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{A}{2} \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le \sqrt{2}. \qquad (4)$$

Từ (3) (4) suy ra (2) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C \end{cases}$

⇔ ABC là tam giác vuông cân.

Nhận xét: Giả thiết ABC là tam giác không nhọn thực sự cần thiết

Nếu ABC là tam giác nhọn, giả sử ABC là tam giác đều cạnh a, khi đó

$$p=\frac{3a}{2};\ (\sqrt{2}+1)R=(\sqrt{2}+1)\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}a.$$

Ta có: $\frac{3}{2}>\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$ (*)

$\Leftrightarrow 9>2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 81>42+8\sqrt{18}$

$\Leftrightarrow 39>8\sqrt{18}.$ (**)

Vì (**) đúng nên (*) đúng $\Rightarrow p>(\sqrt{2}+1)R$, vậy bất đẳng thức ban đầu không đúng trong trường hợp này.

Bài 3. Cho ABC là tam giác không nhọn. Chứng minh rằng: $p\le 2R+r$.

Giải

Giả sử $\max\{A,B,C\}=A\Rightarrow A\ge\frac{\pi}{2}$

Ta có: $p\le 2R+r$ (1)

$$\Leftrightarrow 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le 2R+4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\le 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)-\cos\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)\le 0. \qquad (2)$$

Do $\frac{\pi}{4}\le\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\frac{A}{2}\ge\cos\frac{A}{2}\Rightarrow\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\ge 0.$

Lại có $\frac{|B-C|}{2}<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}<\cos\frac{B-C}{2}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}<0.$

Vậy (2) đúng ⇒ (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}A=90^0\\B=C\end{cases}\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

Nhận xét: Điều kiện ABC là tam giác không nhọn là thực sự cần thiết.

Xét ví dụ khi ABC là tam giác đều cạnh a. Lúc đó

$$p=\frac{3a}{2};\ 2R+r=2\frac{a\sqrt{3}}{3}+\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

Rõ ràng ta có: $\frac{3}{2}>\frac{5\sqrt{3}}{6}$ (vì $\Leftrightarrow 9>5\sqrt{3}$).

Lưu ý bất đẳng thức ban đầu có dạng $p>2R+r$!

Bài 4. (Bất đẳng thức J.T.Groenman)

Nếu ABC là tam giác không nhọn, hãy chứng minh:

1. $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge\frac{8\sqrt{2}-4}{7}.$
2. $ab+bc+ca\le 2\left(4\sqrt{2}-5\right)p^2.$

Lời giải của bài toán này được đưa ra lần đầu bởi tác giả J.T>Groenman trên tạp chí "Nienm Arch Wisk" N^0 64/5 trang 256 – 259.

Bạn đọc hãy tự chứng minh xem sao?

Bài 5. (Bất đẳng thức O.Bottema)

Chứng minh rằng nếu ABC là tam giác không nhọn, ta có:

$p\ge\left(3+2\sqrt{2}\right)r.$

Giải

Theo bài 4 (bất đẳng thức J.T.Groenman) ta có:

$ab+bc+ca\le 2\left(4\sqrt{2}-5\right)p^2.$

Do $ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr$ (bài toán phụ trợ), ta có:

$p^2+r^2+4Rr\le 2\left(4\sqrt{2}-5\right)p^2$

$\Rightarrow r^2+4Rr\le\left(8\sqrt{2}-11\right)p^2$

$$\Rightarrow p^2\ge\frac{1}{8\sqrt{2}-11}\left(4Rr+r^2\right)$$

$$\Rightarrow p^2\ge\frac{8\sqrt{2}+11}{7}\left(4Rr+r^2\right). \qquad (1)$$

Theo bài 1 (bất đẳng thức Emmerich) thì $R\ge\left(\sqrt{2}+1\right)r$, vậy từ (1) có:

$$p^2\ge\frac{8\sqrt{2}+11}{7}\left[4r^2\left(\sqrt{2}+1\right)+r^2\right]$$

$$\Rightarrow p^2\ge\frac{8\sqrt{2}+11}{7}\left(5+4\sqrt{2}\right)r^2$$

$\Rightarrow p^2\ge\left(17+12\sqrt{2}\right)r^2\Rightarrow p^2\ge\left(3+2\sqrt{2}\right)^2r^2$

$\Rightarrow p\ge\left(3+2\sqrt{2}\right)r.$

Đó là đpcm.

Nhận xét: Xét tam giác đều ABC cạnh a, ta có:

$$p=\frac{3a}{2};\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\left(3+2\sqrt{2}\right)r=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6}a.$$

Có thể thấy $\frac{3}{2}<\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6}$ (vì $\Leftrightarrow 9<3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$)

$\Rightarrow p<\left(3+2\sqrt{2}\right)r$.

Vậy giả thiết ABC là tam giác không nhọn là thực sự cần thiết.

Bài 6. Cho ABC là tam giác không nhọn. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$.
2. $(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.
3. $\frac{1}{\sin A\sin B}+\frac{1}{\sin B\sin C}+\frac{1}{\sin C\sin A}\ge 2\left(\sqrt{2}+1\right)$.
4. $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\le\frac{1}{2}$.
5. $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)\ge 2$.
6. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge 2\sqrt{2}-1$.
7. $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 7-4\sqrt{2}$
8. $\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)\ge 4\left(\sqrt{2}-1\right)$
9. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\le\frac{R}{r}\left(\sqrt{2}+1\right)$.
10. $4\sqrt{2}+5\le\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}\le\frac{R}{r}\left(3+\sqrt{2}\right)$.
11. $\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\le\frac{4R^2}{r^2}\left(1+\sqrt{2}\right)$.
12. $\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}+\frac{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}+\frac{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}\ge 4\sqrt{2}+2$.
13. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.
14. $\frac{r}{2R}\left(5+4\sqrt{2}\right)\le\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.
15. $\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}\le\frac{7+4\sqrt{2}}{8}$.
16. $\sin^4\frac{A}{2}+\sin^4\frac{B}{2}+\sin^4\frac{C}{2}\ge\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
17. $R+r\ge\sqrt{2S}$.
18. $S\le Rr\left(\sqrt{2}+1\right)$.
19. $h_a+h_b+h_c\le R\left(1+2\sqrt{2}\right)$.
20. $h_ah_bh_c\le 2r^2R\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.
21. $h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a\le 2Rr\left(1+\sqrt{2}\right)^2$
22. $r\left(4\sqrt{2}+5\right)\le r_a+r_b+r_c\le R\left(3+\sqrt{2}\right)$.
23. $r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\le R^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.
24. $r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\le R^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.
25. $\left(r_a+r_b\right)\left(r_b+r_c\right)\left(r_c+r_a\right)\le 4R^3\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

Giải

1. Xét bất đẳng thức:

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\frac{2\sqrt{2}+1}{2}.\qquad(1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\frac{p^2+4Rr+r^2}{4R^2}\qquad(2)$$

Từ (2) suy ra

$$(1)\Leftrightarrow\frac{p^2+4Rr+r^2}{4R^2}\le\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}\left(\frac{p}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2\le\frac{2\sqrt{2}+1}{2}.\qquad(3)$$

Vì ABC là tam giác không nhọn nên

$\frac{r}{R}\le\sqrt{2}-1$

$\frac{r}{R}\le\sqrt{2}+1$.

Do đó VT (3) $\le\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ hay VT (3) $\le\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

Vậy (3) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác vuông cân.

2. Xét bất đẳng thức:

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \le \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^2. \quad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) = \frac{p(p^2 + r^2 + 2Rr)}{4R^3}. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \frac{p(p^2 + r^2 + 2Rr)}{4R^3} \le \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow 14\left(\frac{p}{R}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{p}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^2. \quad (3)$$

Từ đó ta có:

$$\text{VT }(3) \le \frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)^3 + \frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$$

hay $\text{VT }(3) \le \dfrac{3\sqrt{2}+4}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^2$.

Vậy (3) đúng ⇒ đpcm. Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác vuông cân

3. Xét bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} \ge 2(\sqrt{2}+1). \quad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} = \frac{2R}{r}.$$

Do vậy $(1) \Leftrightarrow 2\dfrac{R}{r} \ge 2(\sqrt{2}+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} \ge \sqrt{2}+1. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Emmerich thì (2) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác vuông cân.

4. Chứng minh tương tự.

5. Xét bất đẳng thức

$$(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) \ge 2 \quad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{2R^2}{pr}$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \frac{R^2}{pr} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{p}.\frac{R}{r} \ge 1 \quad (2)$$

Do $\dfrac{R}{p} \ge \sqrt{2}-1$ và $\dfrac{R}{r} \ge \sqrt{2}+1$, vậy (2) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác vuông cân.

6. Xét bất đẳng thức

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge 2\sqrt{2}-1. \quad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \frac{4R+r}{p}.$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \frac{4R+r}{p} \ge 2\sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R+(2R+r)}{p} \ge 2\sqrt{2}-1. \quad (2)$$

Ta có: $\dfrac{2R}{p} \ge \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}-1)$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra ⇔ ABC là tam giác vuông cân.

Theo trên lại có $2R + r \ge p$, tức $\dfrac{2R+r}{p} \ge 1$, (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra ⇔ ABC là tam giác vuông cân

Từ (3) (3) suy ra (2) đúng ⇒ đpcm

Dấu bằng xảy ra ⇔ ABC là tam giác vuông cân.

7. Suy từ bài 6 với nhận xét:

$$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} = \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 - 2.$$

8. Xét bất đẳng thức

$$\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)\left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\right) \ge 4(\sqrt{2}-1) \quad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)\left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\right) = \frac{4R}{p}$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \frac{R}{p} \geq \sqrt{2}-1$.

Theo trên thì (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

9. Xét bất đẳng thức

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} \leq \frac{R}{r}(\sqrt{2}+1). \qquad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$

Vì thế (1) $\Leftrightarrow \frac{p}{r} \leq \frac{R}{r}(\sqrt{2}+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{R} \leq \sqrt{2}+1. \qquad (2)$$

Theo các bài trên thì (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

10. Xét bất đẳng thức

$$4\sqrt{2}+5 \leq \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2} \leq \frac{R}{r}(3+\sqrt{2}) \qquad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{r}$$

Vì thế (1) $\Leftrightarrow 4\sqrt{2}+5 \leq \frac{4R+r}{r} \leq \frac{R(3+\sqrt{2})}{r}$

Ta có: $4\sqrt{2}+5 \leq \frac{4R+r}{r}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}+4 \leq 4\frac{R}{r}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}+1 \leq \frac{R}{r}. \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Emmerich thì (3) đúng

Lại thấy $\frac{4R+r}{r} \leq \frac{R(3+\sqrt{2})}{r}$

$\Leftrightarrow 4R+r \leq 3R+\sqrt{2}R$

$\Leftrightarrow r \leq R(\sqrt{2}-1)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)r \leq R. \qquad (4)$$

Và theo bất đẳng thức Emmerich thì (4) đúng. Đó chính là đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

11 – 13. Chứng minh hoàn toàn tương tự.

14. Xét bất đẳng thức kép

$$\frac{r}{2R}(5+4\sqrt{2}) \leq \cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{3+\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{4R+r}{2R}.$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \frac{r}{2R}(5+4\sqrt{2}) \leq \frac{4R+r}{2R} \leq \frac{3+R2}{2}$

$$\Leftrightarrow r(5+4\sqrt{2}) \leq 4R+r \leq (3+\sqrt{2})R.$$

Vì $4R+r \leq (3+\sqrt{2})R \Leftrightarrow r \leq R(\sqrt{2}-1)$.

Vì $4R+r \geq (5+4\sqrt{2})R \Leftrightarrow R \geq r(\sqrt{2}+1)$.

Vì thế theo bất đẳng thức Emmerich thì suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân

15 – 16. Chứng minh tương tự.

17. Xét bất đẳng thức

$$R = r \geq \sqrt{2S} \qquad (1)$$

Theo các bài trên ta có $2R + r \geq p$

$$\Rightarrow 4Rr + 2r^2 \geq 2S \qquad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân

Theo các bài trên lại có $R \geq (\sqrt{2}+1)r$

$\Leftrightarrow R - r \geq \sqrt{2}r$

$\Leftrightarrow R^2 - 2Rr + r^2 \geq 2r^2$

$$\Leftrightarrow (R+r)^2 \geq 2r^2 + 4Rr. \qquad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

Từ (2) (3) đi đến $(R+r) \geq 2S$ hay $R + r \geq \sqrt{2S}$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

18. Ta có:

$$S \leq Rr(\sqrt{2}+1) \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow pr \leq Rr(\sqrt{2}+1)$

$$\Leftrightarrow p \leq R(\sqrt{2}+1) \qquad (2)$$

Theo các bài trên thì (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

19. Xét bất đẳng thức

$$h_a + h_b + h_c \le R\left(1+2\sqrt{2}\right) \qquad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, thì $h_a + h_b + h_c = \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$

Vì vậy (1) $\Leftrightarrow \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R} \le R\left(1+2\sqrt{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{p}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\frac{r}{R} \le 1+2\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Theo các bài trên thì

$$\text{VT }(1) \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right) = 1+2\sqrt{2}$$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

20 – 21. Chứng minh tương tự.

22. Xét bất đẳng thức kép

$$r\left(4\sqrt{2}+5\right) \le r_a + r_b + r_c \le R\left(3+\sqrt{2}\right) \qquad (1)$$

Theo bài toán phụ trợ, ta có: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

Vậy (1) $\Leftrightarrow r\left(4\sqrt{2}+5\right) \le 4R + r \le R\left(3+\sqrt{2}\right)$

Ta có: $4R + r \le R\left(3+\sqrt{2}\right)$

$$\Leftrightarrow r \le R\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad (2)$$

Ta có: $r\left(4\sqrt{2}+5\right) \le 4R + r$

$$\Leftrightarrow r\left(\sqrt{2}+1 \le R\right) \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Emmerich thì (2) (3) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác vuông cân.

23 – 25. Chứng minh tương tự.

Chương 5. VÀI ỨNG DỤNG CỦA LƯỢNG GIÁC TRONG VIỆC GIẢI CÁC BÀI TOÁN SƠ CẤP

Trong chương này chúng tôi trình bày một số ứng dụng của lượng giác trong việc giải các bài toán sơ cấp thuộc các lĩnh vực khác – người ta thường gọi là phương pháp lượng giác hóa để giải các bài toán này.

§ 1. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Lượng giác hóa là một trong những phương pháp hay sử dụng để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

Bằng phương pháp đổi biến lượng giác ta đưa biểu thức và điều kiện của bài toán về dạng lượng giác. Từ đó dựa vào phép tính lượng giác ta sẽ dễ dàng hơn trong việc giải bài toán đã cho.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \frac{3+4x^2+3x^4}{\left(1+x^2\right)^2} \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Giải

Đặt x = tanφ. Khi $x \in \mathbb{R}$, thì $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ta có:

$$\frac{3+4x^2+3x^4}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{3+4\tan^2\varphi+2\tan^4\varphi}{\left(1+\tan^2\varphi\right)^2} = \left(3+4\tan^2\varphi+3\tan^{4\varphi}\right)\cos^4\varphi$$

$$= 3\cos^4\varphi + 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 3\sin^4\varphi = 3\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right) + \sin^2 2\varphi$$

$$= 3 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi$$

Xét hàm số $F(\varphi) = 3 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\varphi$, với $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Ta có: $\min F(\varphi) = 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2\varphi = 1$,

$$\max F(\varphi) = 3 - 0 = 3 \Leftrightarrow \sin^2 2\varphi = 0.$$

Vậy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} F(\varphi) = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x = 0,$

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\max_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} F(\varphi)=3 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Bài 2. Cho x, y là hai số thực không đồng nhất bằng 0.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2}$.

Giải

Xét hai khả năng sau:

1. Nếu y = 0, khi đó x ≠ 0. Lúc này $P=\dfrac{x^2-x^2}{x^2}=0\quad \forall x\neq 0, y=0$

2. Nếu y ≠ 0, khi đó $P=\dfrac{\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2y}-2\right)^2}{\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2+1}$.

Đặt $\dfrac{x}{2y}=\tan\varphi$, với $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ta có:

$$P=\frac{\tan^2\varphi-(\tan\varphi-2)^2}{1+\tan^2\varphi}=\cos^2\varphi(4\tan\varphi-4)$$

$$=2\sin 2\varphi-2\cos 2\varphi-2=2\sqrt{2}\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-2$$

Từ đó suy ra $\max P=2\sqrt{2}-2$

$\min P=-2\sqrt{2}-2$

Kết hợp với trường hợp 1, suy ra $\max P=2\sqrt{2}-2$ và $\min P=-2\sqrt{2}-2$.

Bài 3. Cho x ≥ 0, y ≥ 0. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

Giải

Dễ thấy $P=\dfrac{x}{(1+x)^2}-\dfrac{y}{(1+y)^2}$ (1)

Vì x ≥ 0, y ≥ 0, nên đặt $x=\tan^2\varphi$; $y=\tan^2\gamma$ với $0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$; $0\le\gamma<\dfrac{\pi}{2}$. Khi đó

$$P=\frac{\tan^2\varphi}{\left(1+\tan^2\varphi\right)^2}-\frac{\tan^2\gamma}{\left(1+\tan^2\gamma\right)^2}=\tan^2\varphi\cos^4\varphi-\tan^2\gamma\cos^4\gamma$$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi-\frac{1}{4}\sin^2 2\gamma. \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra $-\dfrac{1}{4}\le P\le\dfrac{1}{4}$ với $\varphi,\gamma\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Từ đó ta có: $\max P=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2\alpha=1\\ \sin 2\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{\pi}{4}\\ \gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$

$\min P=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2\alpha=0\\ \sin 2\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \gamma=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$

Chú ý: Xét cách giải “phi lượng giác” của bài toán trên như sau:

Ta có: $P=\dfrac{x}{(1+x)^2}-\dfrac{y}{(1+y)^2}$ (1)

Ta thấy $(1+x)^2\ge 4x$. Do x ≥ 0 nên $(1+x)^2>0\Rightarrow\dfrac{x}{(1+x)^2}\le\dfrac{1}{4}$.

Mặt khác vì y ≥ 0 nên $\dfrac{y}{(1+y)^2}\ge 0$. Từ (1) suy ra $P\le\dfrac{1}{4}$.

Lập luận tương tự có: $P\ge-\dfrac{1}{4}\Rightarrow \max P=\dfrac{1}{4}$ và $\min P=-\dfrac{1}{4}$.

Bài 4. Cho x, y là hai số thực sao cho $x^2+y^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2\left(x^2+6xy\right)}{1+2xy+2y^2}$.

Giải

Do $x^2+y^2=1$, đặt x = sinφ, y = cosφ với φ ∈ [0; 2π].

Khi đó $P=\dfrac{2\sin^2\varphi+12\sin\varphi\cos\varphi}{1+2\sin\varphi\cos\varphi+2\cos^2\varphi}=\dfrac{1-\cos 2\varphi+6\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi+\cos 2\varphi+2}$.

Gọi m là giá trị tùy ý của P. Khi đó phương trình sau đây (ẩn φ)

$\dfrac{1-\cos 2\varphi+6\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi+\cos 2\varphi+2}=m$ (1) có nghiệm

Dễ thấy (1) ⇔ (6 – m)sin2φ – (1 + m)cos2φ = 2m – 1 (2)

Để (2) có nghiệm điều kiện cần và đủ là $(6-m)^2+(1-m)^2\ge(2m-1)^2$

$\Leftrightarrow 2m^2-3m-9\le 0 \Leftrightarrow -6\le m\le 3$

Từ đó suy ra maxP = 3 và minP = –6.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ với $-2\le x\le 2$.

Giải

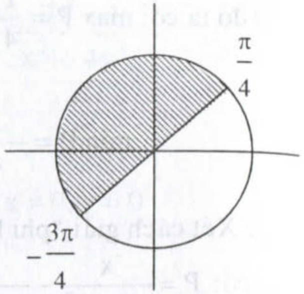
Do –2 ≤ x ≤ 2, nên đặt x = 2sinφ với $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$

Ta có: $x + \sqrt{4-x^2} = 2\sin\varphi + \sqrt{4\left(1-\sin^2\varphi\right)} = 2\sin\varphi + 2\cos\varphi = 2\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$

(do $\cos\varphi \ge 0$ khi $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$)

Ta có: $-\frac{3\pi}{4} \le \varphi - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

$\Rightarrow -2 \le 2\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \le 2\sqrt{2}$



Vậy $\max\limits_{|x|\le 2} f(x) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$,

$\min\limits_{|x|\le 2} f(x) = -2 \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -2$.

Bài 6. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$.

Giải

Do $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$, đặt $x = \sin^2\varphi, y = \cos^2\varphi$ với $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ta có: $P = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{(\sin\varphi + \cos\varphi)(1 - \sin\varphi\cos\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}$.

Đặt $t = \sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ thì dễ thấy $1 < t \le \sqrt{2}$

và $P = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1} = f(t)$.

Do $f'(t) = \frac{-t^4 - 3}{\left(t^2 - 1\right)^2}$, nên có bảng biến thiên sau:

t	1		$\sqrt{2}$
$f'(t)$	‖	$-$	‖
$f(t)$	‖	↘	‖

Vậy $\min P = \min\limits_{1 < t \le \sqrt{2}} f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.

Bài 7. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Giải

Do $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$, nên đặt $x = \sin^2\varphi$, $y = \cos^2\varphi$ với $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ta có: $P = \frac{1}{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi} + \frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi}$

$= \frac{4}{4 - 3\sin^2 2\varphi} + \frac{4}{\sin^2 2\varphi}$.

Đặt $t = \sin^2 2\varphi$. Do $0 < \varphi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t \le 1$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{4 - 3t} + \frac{4}{t} = \frac{8(2 - t)}{4t - 3t^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{8\left(-3t^2 + 12t - 8\right)}{\left(4t - 3t^2\right)}$.

Từ đó ta có bảng biến thiên:

t	0		$\frac{6-\sqrt{12}}{3}$		1		$\frac{6+\sqrt{12}}{3}$
$f'(t)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0
$f(t)$	‖	↘		↗	‖		

Vậy $\min P = \min\limits_{0 < t < 1} f(t) = f\left(\frac{6 - \sqrt{12}}{3}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$.

Bài 8. Cho $x, y, z \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$P = \sqrt{xyz} + \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)}$.

Giải

Do $x, y, z \in [0, 1]$ nên đặt $x = \sin^2 A$, $y = \sin^2 B$, $z = \sin^2 C$

Khi đó $P = \sin A\sin B\sin C + \cos A\cos B\cos C$ (1)

Ta có: $\cos A\cos B\cos C \le \cos A\cos B$ (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos C = 1 \\ \cos A\cos B = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$ (*)

Tương tự $\sin A\sin B\sin C \le \sin A\sin B$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin C = 1 \\ \sin A\sin B = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$ (**)

Từ (1) (2) (3) có: $P \le \cos(A - B)$ (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

Vì $\cos(A - B) \le 1 \Rightarrow P \le 1$ (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow A = B$ và đồng thời thỏa mãn (*) và (**)

$\Leftrightarrow x = y$ và đồng thời thỏa mãn (*) và (**)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0;\ x = y = 0 \\ x = y = z = 1 \end{array}\right. \qquad (6)$$

Vậy maxP = 1 $\Leftrightarrow$ x, y, z thỏa mãn (6)

Bài 9. Cho x, y, z > 0 và $\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+y^4}+\frac{1}{1+z^4}=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = xyz.

Giải

Đặt $x^2 = \tan\alpha$, $y^2 = \tan\beta$, $z^2 = \tan\gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Từ đó $\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+y^4}+\frac{1}{1+z^4}=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (1)

Từ (1) suy ra $\sin^2\alpha = \cos^2\beta = \cos^2\gamma$. Vì thế

$\sin^2\alpha \ge 2\sqrt{\cos^2\beta\cos^2\gamma}$

$\sin^2\beta \ge 2\sqrt{\cos^2\gamma\cos^2\alpha}$

$\sin^2\gamma \ge 2\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$

$\Rightarrow \sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma \ge 8\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$

$\Rightarrow \tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma \ge 8$

$\Rightarrow x^4y^4z^4 \ge 8 \Rightarrow P = xyz \ge \sqrt[4]{8}$

Vậy minP = $\sqrt[4]{8} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt[4]{2}$

Bài 10. Cho x, y, z > o và x + y + z = xyz.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$.

Giải

Do x > 0, y > 0, z > 0 và $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$, nên đặt x = cotA, y = cotB, z = cotC,

với $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: cotAcotB + cotBcotC + cotCcotA = 1 $\Leftrightarrow A + B + C = \frac{\pi}{2}$

Khi đó: $P = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}+\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 B}}+\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 C}} = \sin A + \sin B + \sin C$

Ta có: $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\frac{A+B+C}{3} = \frac{1}{2}$

Vậy maxP = $\frac{3}{2} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$.

Bài 11. Cho x, y, z > 0 và xy + yz + zx = 1

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$

Giải

Do x > 0, y > 0, z > 0 và xy + yz + zx = 1

Đặt $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$, $z = \tan\frac{C}{2}$ với $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Từ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1 \Rightarrow A + B + C = \pi$

Dễ thấy $P = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}\right) = \frac{1}{2}(\tan A + \tan B + \tan C)$ (1)

Do $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ tanA > 0, tanB > 0, tanC > 0 và theo bất đẳng thức

Côsi, ta có: $\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$

Chú ý là do A + B + C = $\pi \Rightarrow$ tanAtanBtanC = tanA + tanB + tanC

$\Rightarrow (\tan A + \text{tna}B + \tan C)^3 \ge 27(\tan A + \tan B + \tan C)$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$

Vậy từ (1) suy ra minP = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý: Xét cách giải "phi lượng giác" bài toán trên như sau:

Do $0 < x < 1 \Rightarrow 1 - x^2 > 0$. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{2x^2+(1-x^2)+(1-x^2)}{3} \ge \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)(1-x^2)} \Rightarrow \frac{4}{27} \ge x^2(1-x^2)(1-x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \ge x(1-x^2) \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \le \frac{x}{1-x^2}$$

Tương tự ta cũng có $\frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 \le \frac{y}{1-y^2}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}z^2 \le \frac{z}{1-z^2}$

Từ đó kết hợp với $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx = 1$

suy ra $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \min P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 12. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 16(x^5 + y^5) - 20(x^3 + y^3) + 5(x + y)$.

Giải

Do $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ đặt x = sinφ, y = cosφ với $\varphi \in [0; 2\pi]$

Ta có: $\sin 5\alpha = \sin 3\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 3\alpha$

$= (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)(1 - 2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$= (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)(1 - 2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha)(3 - 4\sin^2\alpha)$

$$= 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$$

Lập luận tương tự, có: $\cos5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos\alpha + 5\cos\alpha$

Vậy $P = \sin5\alpha + \cos5\alpha = \sqrt{2}\cos\left(5\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

Từ đó suy ra $\max P = \sqrt{2},\ \min P = -\sqrt{2}$

Bài 13. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức $xyz + x + z = y$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} + \frac{3}{z^2+1}$.

Giải

Từ $xyz + x + z = y \Leftrightarrow xy + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} = 1$ (1)

Do $x, y, z > 0$ nên đặt $x = \tan\frac{\alpha}{2}; \frac{1}{y} = \tan\frac{\beta}{2}; z = \tan\frac{\gamma}{2}$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Từ (1) có: $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$

Ta có: $1 + x^2 = 1 + \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

Tương tự: $1 + y^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}};\ 1 + z^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$.

Vậy $P = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos^2\frac{\beta}{2} + 3\cos^2\frac{\gamma}{2} = 1 + \cos\alpha - (1 - \cos\beta) + 3\cos^2\frac{\gamma}{2}$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 3\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= -3\sin\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 3 = 3 - 3\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \frac{2}{3}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= 3 - 3\left[\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - \frac{1}{9}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$= 3 + \frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 3\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

Từ đó suy ra $P \le \frac{10}{3}$.

$$P = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 \\ \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vì $1 + \tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Từ $\alpha = \beta$ suy ra $\tan^2\frac{\alpha}{2} + 2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt{2}$.

Vậy $\max P = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}, z = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Bài 14.

1. Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

   Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$.

2. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = xyz$

   Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2}\frac{z^2}{1+z^2}$.

Giải

1. Đặt $x = \tan\frac{A}{2}, y = \tan\frac{B}{2}, z = \tan\frac{C}{2} \Rightarrow A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Và do $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1 \Rightarrow A + B + C = \pi$.

Ta có: $P = \frac{\tan\frac{A}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{A}{2}}} + \frac{\tan\frac{B}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{B}{2}}} + \frac{\tan\frac{C}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{C}{2}}}$

$$= \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

(theo bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác)

Vậy $\max P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chú ý rằng ta có thể giải bằng cách khác sau đây:

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{xy+yz+zx+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{\frac{x}{x+y}}.\sqrt{\frac{x}{x+z}}$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z}\right)$.

Từ đó bằng lập luận tương tự suy ra:

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \max P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

2. Giải tương tự như phần 1/ và có: $\max P = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$.

Bài 15. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có:

$$\frac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+c^2}} \le \frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}}.$$

Giải

Đặt a = tanα, b = tanβ, c = tanγ. Khi đó đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau:

$$\frac{|\tan\alpha-\tan\gamma|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\gamma}} \le \frac{|\tan\alpha-\tan\beta|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}+\frac{|\tan\beta-\tan\gamma|}{\sqrt{1+\tan^2\beta}\sqrt{1+\tan^2\gamma}}$$

$$\Leftrightarrow |\sin(\alpha-\gamma)| \le |\sin(\alpha-\beta)|+|\sin(\beta-\gamma)|. \qquad (1)$$

Ta có: $|\sin(\alpha-\gamma)| = |\sin(\alpha-\beta)|+|\sin(\beta-\gamma)|$

$$= |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)|$$

$$\le |\sin(\alpha-\beta)|.|\cos(\beta-\gamma)|+|\sin(\beta-\gamma)|.|\cos(\alpha-\beta)|$$

$$\le |\sin(\alpha-\beta)|+|\sin(\beta-\gamma)|.$$

Vậy (1) đúng ⇒ đpcm.

Dễ thấy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\beta\\ \beta=\gamma\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ b=c\end{array}\right.$.

Bài 16. Cho bốn số dương a_1, a_2, a_3, a_4. Chứng minh rằng trong bốn số ấy bao giờ cũng chọn được hai số a_i, a_j ($i \ne j$) sao cho:

$$0 \le \frac{a_i-a_j}{1+a_i+a_j+2a_ia_j} < 2-\sqrt{3}.$$

Giải

Đặt $b_i = 1+\frac{1}{a_i}, i = 1, 2, 3, 4$.

Do $a_i > 0 \Rightarrow b_i > 1\ \forall i = \overline{1,4}$.

Đặt $b_i = \tan\alpha_1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}\quad (i = \overline{1,4})$

Trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ có bốn số α_1, α_2, α_3, α_4.

Vì thế luôn tồn tại hai số α_1, α_j ($i \ne j$) sao cho

$$0 \le \alpha_i - \alpha_j < \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12}. \qquad (1)$$

Do $\tan\frac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}} = 2-\sqrt{3}$, nên từ (1) có: $0 \le \tan(\alpha_i-\alpha_j) < \tan\frac{\pi}{12}$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{\tan\alpha_i-\tan\alpha_j}{1+\tan\alpha_i\tan\alpha_j} < 2-\sqrt{3} \Rightarrow 0 \le \frac{b_i-b_j}{1+b_ib_j} < 2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1+\frac{1}{a_i}-1-\frac{1}{a_j}}{1+\left(1+\frac{1}{a_i}\right)\left(1+\frac{1}{a_j}\right)} < 2-\sqrt{3} \Rightarrow 0 \le \frac{a_j-a_i}{1+a_j+a_i+2a_ja_i} < 2-\sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 17. Cho a_1, a_2,... a_{13} là 13 số thực đôi một khác nhau. Chứng minh tồn tại hai số a_i, a_j ($i \ne j$) sao cho $0 < \frac{a_i-a_j}{1+a_ia_j} < 2-\sqrt{3}$.

Giải

Không giảm tổng quát có thể cho là $a_1 < a_2 < ... < a_{12} < a_{13}$

Đặt $a_i = \tan\alpha_1$, khi đó $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ với $i = \overline{1,13}$.

Từ giả thiết có: $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{13} < \frac{\pi}{2} < \alpha_1 + \pi$.

Xét đoạn $[\alpha_1, \alpha_1 + \pi]$ có độ dài π. Đoạn này được chia thành 13 đoạn nhỏ bằng các điểm chhia α_2, α_3,... α_{13}.

Vậy tồn tại ít nhất một đoạn có độ dài $\le \frac{\pi}{13}$. Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu $0 < \alpha_{i+1} - \alpha_i \le \frac{\pi}{13}$ với $1 \le I \le 12$

   Khi đó ta có: $0 < \tan(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \le \tan\frac{\pi}{13} < \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

   $\Rightarrow 0 < \frac{a_{i+1}-a_i}{1+a_{i+1}a_i} < 2-\sqrt{3}$. Lúc này chọn $a_j = a_i + 1$.

2. Nếu $0 < (\alpha_1+\pi) - \alpha_{13} \le \frac{\pi}{13} \Rightarrow 0 < \tan\left[(\alpha_1+\pi)-\alpha_{13}\right] \le \tan\frac{\pi}{13} < \tan\frac{\pi}{12}$

   $\Rightarrow 0 < \frac{a_1-a_{13}}{1+a_1a_{13}} < 2-\sqrt{3} \Rightarrow$ đó là đpcm.

Bài 18. Cho a > 0, b > 0, c > 0. Chứng minh

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\ge\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

Giải

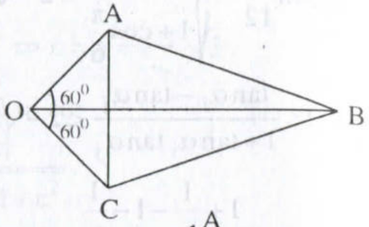
Đặt OA = a; OB = b; OC = c; $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=60^0$; $\widehat{AOC}=120^0$

Theo định lí hàm số cosin ta có:

$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos60^0 = a^2 + b^2 - ab$

$BC^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos60^0 = b^2 + c^2 - bc$

$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos120^0 = a^2 + c^2 - ac.$



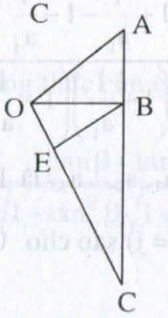
Vì AB + BC ≥ AC nên suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ A, B, C thẳng hàng.

Kẻ BE // OA

⇒ BOE là tam giác đều cạnh b.

Theo định lí Talet có:



$$\frac{BE}{OA}=\frac{CE}{CO}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{b}{a}=\frac{c-b}{c}\Leftrightarrow\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

§ 2. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Nhiều bài toán chứng minh các đẳng thức nhờ sử dụng nhiều phương pháp lượng giác hóa mà có lời giải đơn giản đi rất nhiều.

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực sao cho (ab + 1)(bc + 1)(ca + 1) ≠ 0.

Chứng minh: $\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}+\dfrac{c-a}{1+ca}=\dfrac{a-b}{1+ab}\dfrac{b-c}{1+bc}\dfrac{c-a}{1+ca}.$

Giải

Đặt a = tanα, b = tanβ, c = tanγ. Khi đó

$$VT=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}+\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}+\frac{\tan\gamma-\tan\alpha}{1+\tan\gamma\tan\alpha}$$

$$= \tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha). \qquad (1)$$

Do (α – β) + (β – γ) + (γ – α) = 0

⇒ tan(α – β) + tan(β – γ) + tan(γ – α) = tan(α – β)tan(β – γ)tan(γ – α).

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 2. Cho x + y + z = xyz.

Chứng minh:

$x(y^2-1)(z^2-1)\ne y(z^2-1)(x^2-1)+z(x^2-1)(y^2-1)=4xyz.$

Giải

Xét hai khả năng sau:

1. Nếu xyz = 0 ⇒ ít nhất 1 trong ba số x, y, z bằng 0.

Giả sử x = 0 ⇒ y + z = 0 (hay y = –z)

Lúc này VP = 0, còn $VT = y(1-z^2) + z(1-y^2) = 0$ (do y = –3)

⇒ đẳng thức cần chứng minh là đúng.

2. Nếu xyz ≠ 0. Khi đó đẳng thức cần chứng minh có dạng tương đương sau:

$$\frac{y^2-1}{2y}\frac{z^2-1}{2z}+\frac{z^2-1}{2z}\frac{x^2-1}{2x}+\frac{x^2-1}{2x}\frac{y^2-1}{2y}=1. \qquad (1)$$

Đặt x = tanα; y = tanβ; z = tanγ.

Từ giả thiết suy ra tanα + tanβ + tanγ = tanαtanβtanγ

⇒ α + β + γ = kπ, k ∈ Z

⇒ 2α + 2β + 2γ = 2kπ, k ∈ Z

Ta có: VT (1) = cot2αcot2β + cot2βcot2γ + cot2γcot2α (2)

Do 2α + 2β + 2γ = 2kπ suy ra

cot2αcot2β + cot2βcot2γ + cot2γcot2α = 1 ⇒ đpcm.

Bài 3. Cho xy + yz + zx = 1.

Chứng minh: $x + y + z - 3xyz = x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2).$

Giải

Đặt x = tanα, y = tanβ, z = tanγ.

Khi đó từ giả thiết ta có: tanαtanβ + tanβtanγ + tanγtanα = 1

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \qquad (1)$$

Từ (1) có: 2α + 2β + 2γ = π + k2π ⇒ sin(2α + 2β + 2γ) = 0

⇒ sin(2α + 2β)cos2γ + sin2γcos(2α + 2β) = 0

⇒ sin2αcos2βcos2γ + sin2βcos2αcos2γ + sin2γcos2αcos2β

– sin2γsin2αsin2β = 0. (2)

Rõ ràng cosαcosβcosγ ≠ 0 (do tồn tại tanα, tanβ, tanγ)

Vậy từ (2) suy ra (sau khi chia cả hai vế cho $\cos^2\alpha\,\mathrm{cor}^2\beta\cos^2\gamma$)

$$\tan\alpha\frac{\cos2\beta\cos2\gamma}{\cos^2\beta\cos^2\gamma}+\tan\beta\frac{\cos2\alpha\cos2\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\gamma}+\tan\gamma\frac{\cos2\alpha\cos2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=4\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \qquad (3)$$

Do $\dfrac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}=2-\left(1+\tan^2\alpha\right)=1-\tan^2\alpha$, từ đó bằng lập luận tương tự suy ra:

$$\tan\alpha(1-\tan^2\beta)(1-\tan^2\gamma)+\tan\beta(1-\tan^2\alpha)(1-\tan^2\gamma)$$
$$+\tan\gamma(1-\tan^2\alpha)(1-\tan^2\beta)=4\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

hay ta có: $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$ (4)

Sau khi rút gọn (4) có dạng sau:

$x+y+z+xyz(xy+yz+zx)\ 4xyz=x(x^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)$ (5)

Từ giả thiết $xy+yz+zx=1$, nên từ (5) có

$x+y+z-3xyz=x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)\Rightarrow$ đpcm.

Bài 4. Cho x, y, z đều khác $\pm\sqrt{3}$ và $x+y+z=xyz$. Chứng minh:

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

Giải

Đặt $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$, $z=\tan\gamma$

Từ giả thiết $x+y+z=xyz\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=k\pi, k\in Z$

$\Rightarrow3\alpha+3\beta+3\gamma=3k\pi, k\in Z$

$\Rightarrow\tan3\alpha+\tan3\beta+\tan3\gamma=\tan3\alpha\tan3\beta\tan3\gamma.$ (1)

Áp dụng công thức $\tan3t=\dfrac{3\tan t-\tan^3t}{1-3\tan^2t}$, từ (1) suy ra đpcm.

Bài 5. Cho $x, y, z\in(0;1)$ và $x+y+z-xyz=1-xy-yz-zx$.

Chứng minh: $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{1-y^2}{y}+\dfrac{1-z^2}{z}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1-x^2}{x}\dfrac{1-y^2}{y}\dfrac{1-z^2}{z}$.

Giải

Đặt $x=\tan\dfrac{\alpha}{4}; y=\tan\dfrac{\beta}{4}; z=\tan\dfrac{\gamma}{4}$.

Do $x, y, z\in(0;1)\Rightarrow A, B, C\in(0;\pi)$.

Từ giả thiết suy ra: $\tan\dfrac{A}{4}+\tan\dfrac{B}{4}+\tan\dfrac{C}{4}-\tan\dfrac{A}{4}\tan\dfrac{B}{4}\tan\dfrac{C}{4}$

$$=1-\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}-\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}-\tan\frac{A}{4}\tan\frac{C}{4}\quad(1)$$

Có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu $\tan\dfrac{A}{4}\tan\dfrac{B}{4}-\tan\dfrac{B}{4}\tan\dfrac{C}{4}-\tan\dfrac{A}{4}\tan\dfrac{C}{4}=1$ (2)

Khi đó từ (1) có: $\tan\dfrac{A}{4}+\tan\dfrac{B}{4}+\tan\dfrac{C}{4}=\tan\dfrac{A}{4}\tan\dfrac{B}{4}\tan\dfrac{C}{4}$ (3)

Từ (3) suy ra $\dfrac{A}{4}+\dfrac{B}{4}+\dfrac{C}{4}=\pi$

Đó là điều vô lí và A< B, C $\in(0;\pi)$.

Vậy khả năng 1/ không thể xảy ra.

2. Nếu $\tan\dfrac{A}{4}\tan\dfrac{B}{4}-\tan\dfrac{B}{4}\tan\dfrac{C}{4}-\tan\dfrac{A}{4}\tan\dfrac{C}{4}\neq1$, khi đó

$$(1)\Leftrightarrow\frac{\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}-\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}{1-\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}-\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}-\tan\frac{A}{4}\tan\frac{C}{4}}=1$$

$$\Leftrightarrow\tan\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right)=1$$

Do A, B< C $\in(0;\pi)\Rightarrow\dfrac{A}{4}+\dfrac{B}{4}+\dfrac{C}{4}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow A+B+C=\pi$

Từ đó $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$ (4)

Vì $\cot\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{4}}{2\tan\frac{A}{4}}=\dfrac{1-x^2}{2x}$; $\cot\dfrac{B}{2}=\dfrac{1-y^2}{2y}$; $\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{1-z^2}{2z}$, nên từ (4) có:

$$\frac{1-x^2}{2x}+\frac{1-y^2}{2y}+\frac{1-z^2}{2z}=\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{8xyz}$$

hay $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{1-y^2}{y}+\dfrac{1-z^2}{z}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1-x^2}{x}\dfrac{1-y^2}{y}\dfrac{1-z^2}{z}\Rightarrow$ đpcm.

Bài 5. Cho $x+y+z=xyz$ và $x>0$, $y>0$, $z>0$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)}-\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{(1+z^2)(1+x^2)}-\sqrt{1+z^2}-\sqrt{1+x^2}}{zx}$$

$$+\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}-\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}}{xy}=0.$$

Giải

Do $x, y, z>0$ và $x+y+z=xyz$, nên nếu đặt $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$, $z=\tan\gamma$

$\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\pi$

Ta có:

$$\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)}-\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+z^2}}{yz}=\frac{\frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}-\frac{1}{\cos\beta}-\frac{1}{\cos\gamma}}{\tan\beta\tan\gamma}$$

$$=\frac{1-(\cos\beta+\cos\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

Tương tự với hai phân số còn lại, khi đó ta đưa đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau:

$$\frac{1-(\cos\beta+\cos\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{1-(\cos\gamma+\cos\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{1-(\cos\alpha+\cos\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=0 \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow \sin\alpha - \sin\alpha(\cos\beta + \cos\gamma) + \sin\beta - \sin\beta(\cos\gamma + \cos\alpha)$

$+ \sin\gamma - \sin\gamma(\cos\alpha + \cos\beta) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta + \gamma) - \sin(\gamma + \alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin\gamma - \sin\alpha - \sin\beta = 0 \qquad (2)$

(do $\alpha + \beta + \gamma = \pi$)

Vì (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 6. Cho x, y, $z \neq 1$ và $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+x}{1-x}\frac{1+y}{1-y}\frac{1+z}{1-z}$

Chứng minh rằng:

1. $x + y + z - xyz = 1 - xy - yz - zx$,
2. $\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1-z^2}{1+z^2}$,
3. $\frac{(1-xy)^2-(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{2z}{1+z^2}$.

Giải

Đặt x = tanA, y = tanB, z = tanC. Khi đó ta có (do x, y, z đều $\neq 1$)

$A, B, C \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ và $A, B, C \neq \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k \in Z$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{1+\tan A}{1-\tan A}+\frac{1+\tan B}{1-\tan B}+\frac{1+\tan C}{1-\tan C}=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}\frac{1+\tan B}{1-\tan B}\frac{1+\tan C}{1-\tan C}$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+B\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+C\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+B\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+C\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\left(\frac{\pi}{4}+B\right)+\left(\frac{\pi}{4}+C\right)=\pi+k\pi,\ k\in Z$$

$$\Leftrightarrow A+B+C=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z. \qquad (1)$$

1. Từ (1) suy ra $\tan(A + B + C) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan C\tan(A+B)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(A+B)}{1-\tan A\tan B}+\tan C=1-\tan C\frac{\tan A\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C$

$= 1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A$

$\Rightarrow x + y + z - xyz = 1 - xy - yz - zx \Rightarrow$ đpcm.

2. Ta có: $\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad (2)$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\tan A+\tan B)(1-\tan A\tan B)}{(1+\tan^2 A)(1+\tan^2 B)}=\frac{1-\tan^2 C}{1+\tan^2 C}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\sin(A+B)(1-\tan A\tan B)}{\cos A\cos B\dfrac{1}{\cos^2 A\cos^2 B}}=\cos 2C$$

$\Leftrightarrow \sin(2A + 2B) = \cos 2C$

$$\Leftrightarrow (2A+2B)+2C=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in Z$$

Từ (1) suy ra (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

3. Chứng minh hoàn toàn tương tự như 1/2/.

Bài 7. Cho x, y, z > 0 và $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh:

$$1+xyz=x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}+y\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)}+z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

Giải

Do x, y, z > 0 và $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \Rightarrow 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$.

Vì thế nếu đặt $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$ thì α, β, γ đều thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ giả thiết ta có: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\frac{1+\cos 2\gamma}{2}+\cos\alpha[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]=1$$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha\cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha\cos(\beta - \gamma) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\beta + \gamma)[\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha] + \cos\alpha[\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha] = 0$

$\Leftrightarrow [\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha][\cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha] = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}=0 \qquad (1)$$

Do $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left|\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right|<\frac{\pi}{2};\ \left|\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right|<\frac{\pi}{2};\ \left|\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\neq 0$, nên từ (1) có:

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=0\Rightarrow\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1$

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta)\cos\gamma - \sin(\alpha + \beta)\sin\gamma = -1$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = -1$

$\Rightarrow 1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma\sin\alpha + \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta.$ (2)

Lại do $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}; \sin\beta = \sqrt{1-y^2}; \sin\gamma = \sqrt{1-z^2}.$

Vậy từ (2) có:

$$1 + xyz = x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + y\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)} + z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

⇒ đpcm.

§ 3. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG CÁC BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Cho phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Chứng minh rằng phương trình trên có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_3^2 = 2 + x_2$ (ở đây $x_1 < x_2 < x_3$).

Giải

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Khi đó ta có phương trình

$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0.$ (1)

Dễ thấy f(x) là hàm liên tục trên R, ngoài ra ta có:

$f(-2) < 0; f(-1) > 0; f(1) < 0; f(2) > 0$, nên theo tính chất của hàm số liên tục f(x) suy ra (1) có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 sao cho

$-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 2$ (2)

Từ (2) suy ra mọi nghiệm của (1) đều thỏa mãn điều kiện $|x_i| < 2$, $i = 1, 2, 3$

Vì thế với (1) có thể dùng phép đổi biến $x = 2\cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le 180^0)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi + 1 = 0$ (2)

$\Leftrightarrow 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 3\varphi = \cos 120^0$

$\Leftrightarrow 3\varphi = \pm 120^0 + k360^0$

$\Leftrightarrow \varphi = \pm 40^0 + k120^0.$

Do $0 \le \varphi \le 180^0 \Rightarrow \varphi = 40^0, \varphi = 160^0, \varphi = 80^0$ là ba nghiệm của (2).

Để ý $\cos 160^0 < \cos 80^0 < \cos 40^0$ nên (1) có ba nghiệm là

$x_1 = 2\cos 160^0; x_2 = 2\cos 80^0; x_3 = 2\cos 40^0$

Ta có: $x_3^2 = 4\cos^2 40 = 2(1 + \cos 80^0) = x_2 + 2$

⇒ đpcm.

Chú ý: Tương tự ta có các bài toán sau:

1. Giải phương trình $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

   Đáp số: $x_1 = \sin\dfrac{\pi}{18}; x_2 = \sin\dfrac{5\pi}{18}; x_3 = -\sin\dfrac{7\pi}{18}$.

2. Giải phương trình $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

   Đáp số: $x_1 = \cos\dfrac{\pi}{9}; x_2 = -\cos\dfrac{2\pi}{9}; x_3 = -\cos\dfrac{4\pi}{9}$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 4\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 5\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$.

Giải

Viết lại hệ đã cho dưới dạng tương đương sau:

$$\begin{cases} xyz \ne 0 & (1) \\ \dfrac{2x}{3(x^2+1)} = \dfrac{2y}{4(y^2+1)} = \dfrac{2z}{5(z^2+1)} & (2) \\ xy + yz + zx = 1 & (3) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra nếu (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm của hệ (1) (2) (3) thì x_0, y_0, z_0 cùng dấu; đồng thời $(-x_0, -y_0, -z_0)$ cũng là một nghiệm khác của hệ đã cho.

Vì thế trước hết ta chỉ cần tìm nghiệm dương của hệ (1) (2) (3)

Đặt $x = \tan\dfrac{\alpha}{2}; y = \tan\dfrac{\beta}{2}; z = \tan\dfrac{\gamma}{2}$.

Do $x > 0, y > 0, z > 0$ nên $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi)$

Từ (3) có: $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2} + \tan\dfrac{\beta}{2}\tan\dfrac{\gamma}{2} + \tan\dfrac{\gamma}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi.$

Từ (2) có: $\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{3\left(1 + \tan^2\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{2\tan\dfrac{\beta}{2}}{4\left(1 + \tan^2\dfrac{\beta}{2}\right)} = \dfrac{2\tan\dfrac{\gamma}{2}}{5\left(1 + \tan^2\dfrac{\gamma}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{3} = \dfrac{\sin\beta}{4} = \dfrac{\sin\gamma}{5}.$ (4)

Có thể coi α, β, γ là 3 góc của một tam giác. Gọi a, b, c là ba cạnh ứng với α, β, γ. Theo định lí hàm số sin từ (4) có: $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \gamma = 90^0$.

Vậy $z = \tan\dfrac{\gamma}{2} = \tan 45^0 = 1$.

Ta có:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}; \sin\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \frac{1}{3}$. Tương tự $y = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x, y, z) = \left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right) \\ \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -1\right)\end{array}\right.$.

Bài 3. Phương trình $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$ có bao nhiêu nghiệm nằm trong khoảng (0; 1).

Giải

Vì xét trong (0; 1), nên đặt $x = \sin\varphi$, với $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Khi đó đưa phương trình đã cho về dạng

$8\sin\varphi(1 - 2\sin^2\varphi)(8\sin^4\varphi - 8\sin^2\varphi + 1) = 1$ (1)

Ta có: $1 - 2\sin^2\varphi = \cos2\varphi$

$8\sin^4\varphi - 8\sin^2\varphi + 1 = 8\sin^2\varphi(\sin^2\varphi - 1) + 1$

$= 1 - 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 1 - 2\sin^2 2\varphi = \cos4\varphi$.

Vì thế (1) $\Leftrightarrow 8\sin\varphi\cos2\varphi\cos4\varphi = 1$. (2)

Do $0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi \neq 0$, nên

(2) $\Leftrightarrow 8\sin\varphi\cos\varphi\cos2\varphi\cos4\varphi = \cos\varphi$

$$\Leftrightarrow \sin8\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\varphi + k2\pi \\ 8\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\varphi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \\ \varphi = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right., k \in Z$$

Do $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, nên

- Với $\varphi = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9}$, ta có: $0 < \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} < \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{18} + k\frac{2}{9} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < 1 + 4k < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < 2$

$\Leftrightarrow k = 0; 1$

- Với $\varphi = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}$, ta có: $\varphi < \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < 1 + 4k < 7$

$\Leftrightarrow 0 < 1 + 4k <$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow k = 0, 1$

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên (0; 1).

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$.

Giải

Ta có: $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y(1 - x^2) & (1) \\ 2y = z(1 - y^2) & (2) \\ 2z = x(1 - z^2) & (3) \end{cases}$

Rõ ràng $1 - x^2 \neq 0$; $1 - y^2 \neq 0$; $1 - z^2 \neq 0$

(vì chẳn hạn nếu $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm1$ do đó VP (1) = 0; VT (1) ≠ 0 đó là điều vô lí)

Vậy (1) (2) (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x}{1 - x^2} & (4) \\ z = \frac{2y}{1 - y^2} & (5) \\ z = \frac{2x}{1 - z^2} & (6) \end{cases}$

Đặt $x = \tan\alpha$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó từ (4) có $y = \tan2\alpha$, từ (5) có $z = \tan4\alpha$, từ (6) có $x = \tan8\alpha$.

Vì thế ta có: $\tan8\alpha = \tan\alpha$

$\Leftrightarrow 8\alpha = \alpha + k\pi$

$\Leftrightarrow 8\alpha = \alpha + k\pi$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{7}, k \in Z$

Ta cần có $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow -\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow k = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$$

Vậy phương trình đã cho các nghiệm $(x, y, z) = (\tan\alpha; \tan 2\alpha; \tan 4\alpha)$

$$= \left(\tan\frac{k\pi}{7}, \tan\frac{2k\pi}{7}, \tan\frac{4k\pi}{7}\right)$$

Với $k = -3; -1; -2; 0; 1; 2$.

Bài 5. Chứng minh rằng hệ phương trình $\begin{cases} 32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0 \\ 16x^3 - 12x + \sqrt{5} - 1 = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Giải

Ta có: $\begin{cases} 32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0 \\ 16x^3 - 12x + \sqrt{5} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^5 - 20x^3 + 5x = \dfrac{1}{2} & (1) \\ 3x - 4x^3 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} & (2) \end{cases}$

Đặt $x = \sin\alpha$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó ta có $3x - 4x^3 = \sin 3\alpha$,

$16x^5 - 20x^5 + 5x = \sin 5\alpha$ (xem bài 12, §1, chương 4).

Lúc này (1) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5\alpha = \dfrac{1}{2} & (3) \\ \sin 3\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} & (4) \end{cases}$

Như đã biết (xem chương 1) $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Vậy nếu lấy $\alpha_0 = \frac{\pi}{30}$, thì $\begin{cases} \sin(5\alpha_0) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \sin(3\alpha_0) = \sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \end{cases}$

Vậy α_0 thỏa mãn hệ (3) (4). Từ đó suy ra hệ đã cho chắc chắn có nghiệm (vì ít nhất nó nhận $\alpha_0 = \frac{\pi}{30}$ là nghiệm) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 6. Giải phương trình $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$.

Giải

Do $|x| \le 1$ nên đặt $x = \sin\varphi$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ta đưa phương trình về dạng sau:

$$4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = |\cos\varphi| = \cos\varphi \left(\text{do } |\varphi| \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\sin 3\varphi = \cos\varphi \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\varphi\right) = \cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 3\varphi = \varphi + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} + 3\varphi = -\varphi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \varphi = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad (1)$$

Do $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$ nên từ (1), ta có:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + k\pi \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4} \le k \le \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \le k \le \frac{5}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0, \\ k = 0 \text{ hoặc } k = 1 \end{array}\right.$$

Vậy (1) có nghiệm:

$$x_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ x_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8};\ x_3 = \sin\frac{3\pi}{8}.$$

Có thể tính được:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\ \ \sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

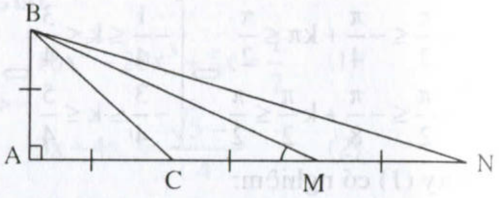
Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; x_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

§4. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Nhiều bài toán hình học phẳng và hình học không gian nhiều sử dụng phương pháp “lượng giác hóa” mà có lời giải gọn gàng và trong sáng. Sau đây ta xét và thí dụ minh họa điều ấy.

Bài 1. Cho tam giác vuông cân ABC đỉnh A. Kéo dài AC về phía C các đoạn CM = MN = AC. Chứng minh $\widehat{BCA}+\widehat{BMA}+\widehat{BNA}=90^0$.

Giải



Ta có: $\widehat{BCA}+\widehat{BMA}+\widehat{BNA}=90^0$

$\Leftrightarrow \widehat{BMA}+\widehat{BNA}=45^0$. (1)

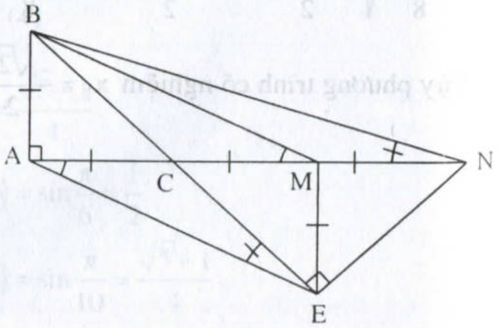
Dễ thấy

$\tan\left(\widehat{BMA}+\widehat{BNA}\right)$

$$=\frac{\tan\widehat{BMA}+\tan\widehat{BNA}}{1-\tan\widehat{BMA}\tan\widehat{BNA}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=1$$

Từ đó suy ra (1) đúng ⇒ đpcm.

Nhận xét: Xét cách giải thuần túy “hình học phẳng sau”



Dựng hình hình hành BMEA

Ta có CEN là tam giác vuông cân đỉnh E.

Dễ thấy BAEN là tứ giác nội tiếp (từ A và E nhìn BN dưới cùng góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{BEA}=\widehat{BNA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Lại có: $\widehat{EAC}=\widehat{BMA}$ (so le trong)

Từ đó BMA + BNA = BEA + EAC (1)

Lại có 45^0 = BCA = BEA + EAC (góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow \widehat{BCA}+\widehat{BMA}+\widehat{BNA}=90^0$ ⇒ đpcm.

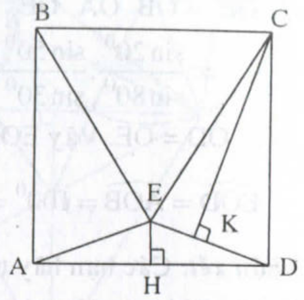
Bài 2. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AD về phía trong hình vuông dựng tam giác cân ADE đỉnh E có góc đáy bằng 15^0. Chứng minh BCE là tam giác đều.

Giải

Kẻ EH ⊥ AD và CK ⊥ ED.

Gọi cạnh hình vuông là a, khi đó $ED=\frac{HD}{\sin\widehat{HED}}=\frac{a}{2\sin 75^0}$ (1)

(do $\widehat{HED}=\frac{1}{2}\widehat{AED}=\frac{150^0}{2}=75^0$).



Ta có: $\widehat{CDK}=75^0\Rightarrow JD=CD\cos\widehat{CDK}=a\cos 75^0$

Từ đó: $KD=\frac{a\sin 150^0}{2\sin 75^0}=\frac{a\sin 30^0}{2\sin 75^0}=\frac{a}{4\sin 75^0}$ (2)

Từ (1) (2) có: $KD=\frac{1}{2}ED\Rightarrow KD=KE$

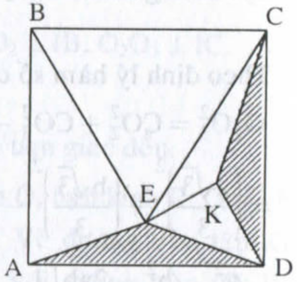
⇒ CED là tam giác cân đỉnh C ⇒ CE = CD

Lập luận tương tự, có: BE = BA.

⇒ BEC là tam giác đều ⇒ đpcm.

Nhận xét: Xét cách giải thuần túy hình học như sau:

Về phía trong của hình vuông dựng tam giác cân CKD đỉnh K có góc ở đáy cũng bằng 15^0 ⇒ ΔKCD = ΔEAD (g.c.g)



⇒ KD = ED

Ta có: $\widehat{EDK}=90^0-\left(15^0+15^0\right)=60^0$

⇒ EKD là tam giác đều

⇒ EK = KD = ED

Do $CKD=150^0$; $EKD=60^0\Rightarrow EKC=150^0$

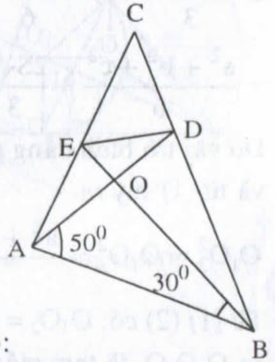
⇒ ΔEKC = ΔCKD (c.g.c)

⇒ CE = CD

Lập luận tương tự có: BE = BA ⇒ BEC là tam giác đều.

Bài 3. Cho ABC là tam giác cân đỉnh A có góc ở đáy bằng 50^0. Lấy D, E tương ứng trên BC, AC ssao cho $\widehat{BAD}=50^0$, $\widehat{ABE}=30^0$. Tính $\widehat{BED}$.

Giải



Giả sử AD ∩ BE = O.

Ta có: $\widehat{AOB}=180^0-\left(30^0+50^0\right)=100^0$

$\widehat{BDA}=180^0-\left(50^0+50^0\right)=80^0$

$\widehat{CBE}=50^0-30^0=20^0$

$\widehat{AEB}=50^0+20^0=70^0$

$\widehat{CAD}=180^0-3.50^0=30^0$.

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác ODB, ta có:

$$\frac{OD}{OB}=\frac{\sin 20^0}{\sin 80^0} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{OD}{OE}=\frac{OD}{OB}.\frac{OB}{OA}.\frac{OA}{OE}$$

$$=\frac{\sin 20^0}{\sin 80^0}.\frac{\sin 50^0}{\sin 30^0}.\frac{\sin 70^0}{\sin 30^0}=\frac{4\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0}{\sin 80^0}=\frac{\sin 80^0}{\sin 80^0}=1$$

$\Rightarrow OD = OE$. Vậy EOD là tam giác cân đỉnh O, nên

$$\widehat{EOD}=\widehat{AOB}=100^0 \Rightarrow \widehat{BED}=\widehat{OED}=\frac{180^0-100^0}{2}=40^0.$$

Nhận xét: Các bạn hãy tự giải lại bằng cách thuần túy sử dụng hình học phẳng

Bài 4. (Bài toán Napoleon Bonaparte)

Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác trên ba cạnh dựng ba tam giác đều ABC′, BCA′, ACB′. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba tam giác đều ấy. Chứng minh $O_1O_2O_3$ cũng là tam giác đều.

Giải

Theo định lý hàm số cosin, ta có:

$$O_2O_3^2=CO_2^2+CO_3^2-2CO_2.CO_3\cos\widehat{O_3CO_2}$$

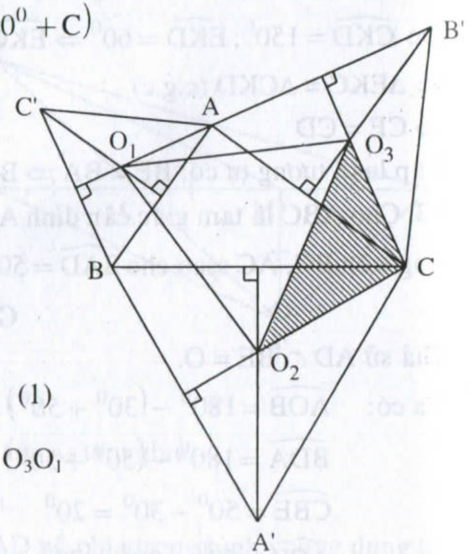
$$=\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{b\sqrt{3}}{3}\cos(60^0+C)$$

$$=\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2ab}{3}\left(\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)$$

$$=\frac{a^2+b^2}{3}-\left[\frac{2ab\cos C}{6}-\frac{2\sqrt{3}ab\sin C}{6}\right]$$

$$=\frac{a^2+b^2}{3}-\left[\frac{a^2+b^2-c^2}{6}-\frac{\sqrt{3}.4S}{6}\right]$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2S\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$



Do vài trò bình đẳng giữa O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 và từ (1) suy ra

$$O_1O_2^2=O_1O_3^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2S\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Từ (1) (2) có: $O_1O_2 = O_1O_3 = O_2O_3$

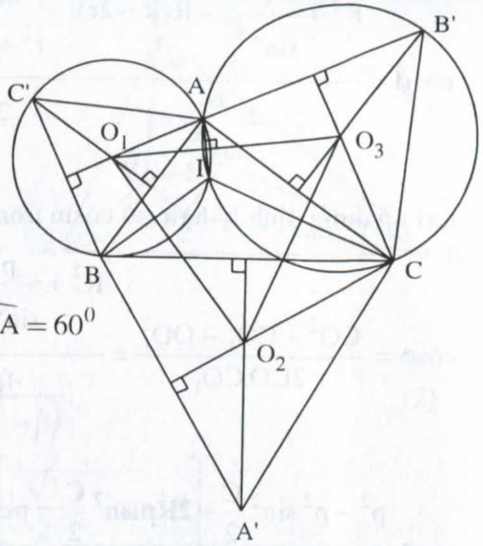
$\Rightarrow O_1O_2O_3$ là tam giác đều

$\Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét:

Xét cách giải thuần túy bằng hình học phẳng sau:

(đây chính là cách giải của hoàng đế Napoleon Bonaparte)



Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác ABC′ và ACB′ cắt nhau tại A và I.

Do BC′AI là tứ giác nội tiếp mà $\widehat{BC'A}=60^0$

$\Rightarrow \widehat{AIB}=120^0$.

Tương tự $\widehat{AIC}=120^0 \Rightarrow \widehat{BIC}=120^0$.

Vậy BICA′ cũng là tứ giác nội tiếp.

Nói khác đi ba đường tròn ngoại tiếp 3 tam giác ABC′, BCA′, ACB′ đồng quy tại I.

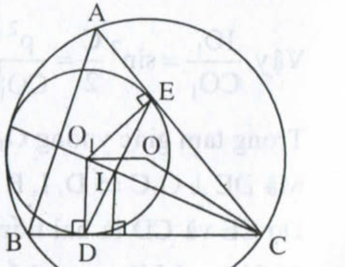
Theo tính chất của đường tròn, ta có: $O_1O_3 \perp AI$, $O_1O_2 \perp IB$, $O_2O_3 \perp IC$.

Do $\widehat{AIC}=120^0 \Rightarrow \widehat{O_1O_3O_2}=60^0$

Tương tự có: $\widehat{O_3O_1O_2}=\widehat{O_1O_2O_3}=60^0 \Rightarrow O_1O_2O_3$ là tam giác đều.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC với bán kính r. Vẽ đường tròn tâm O_1 tiếp xúc với BC tại D, AC tại E và tiếp xúc trong với đường tròn (O; R). Chứng minh rằng I là trung điểm của DE.

Giải



Gọi O_1 và p là tâm và bán kính đường tròn tiếp xúc với CB, CA và tiếp xúc trong với đường tròn (O; R). Khi đó C, I, O_1 thẳng hàng vì chúng cùng nằm trên đường phân giác trong của góc C. Do đó ta có:

$$CI=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}} \text{ và } CO_1=\frac{p}{\sin\frac{C}{2}}. \quad (*)$$

Đặt $\widehat{O_1CO}=\varphi$. Trong tam giác COI theo định lý hàm số cosin, ta có:

$$\cos\varphi=\frac{CO^2+CI^2-OI^2}{2CI.CO}$$

Theo công thức Euler ta có: $OI^2 = R(R - 2r)$, vậy

$$\cos\varphi = \frac{R^2 + \dfrac{r^2}{\sin^2\dfrac{C}{2}} - R(R-2r)}{2\dfrac{rR}{\sin\dfrac{C}{2}}} = \frac{r^2 + 2Rr\sin^2\dfrac{C}{2}}{2rR\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{r + 2R\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\sin\dfrac{C}{2}} \quad (1)$$

Lại áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔCOO_1 ta có:

$$\cos\varphi = \frac{CO^2 + CO_1^2 - OO_1^2}{2CO.CO_1} = \frac{R^2 + \dfrac{p^2}{\sin^2\dfrac{C}{2}} - (R-p)^2}{2R\dfrac{p}{\sin\dfrac{C}{2}}}$$

$$= \frac{p^2 - p^2\sin^2\dfrac{C}{2} + 2Rp\sin^2\dfrac{C}{2}}{2Rp\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{p\cos^2\dfrac{C}{2} + 2R\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\sin\dfrac{C}{2}}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra $\dfrac{r + 2R\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\sin\dfrac{C}{2}} = \dfrac{p\cos^2\dfrac{C}{2} + 2R\sin^2\dfrac{C}{2}}{2R\sin\dfrac{C}{2}}$

$\Rightarrow r = p\cos^2\dfrac{C}{2} \Rightarrow \dfrac{r}{p} = \cos^2\dfrac{C}{2}.$

Theo (*), ta có: $IO_1 = CO_1 - CI = \dfrac{p-r}{\sin\dfrac{C}{2}}.$

Vậy $\dfrac{IO_1}{CO_1} = \sin^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{p^2}{CO_1^2} \Rightarrow IO_1.CO_1 = p^2 = O_1D^2.$

Trong tam giác vuông O_1DC tại D, lại có $IO_1.CO_1 = O_1D^2$

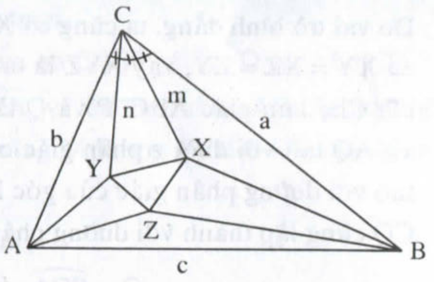
Mà $DE \perp O_1C \Rightarrow$ D, I, E thẳng hàng

Do CE và CD là hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm tới đường tròn (O_1, p) từ đó ta có I là trung điểm của DE. Đó là đpcm.

Bài 6. (Bài toán Morley)

Cho tam giác ABC. Ở mỗi góc của tam giác vẽ hai đường chia góc đó ra là ba phần bằng nhau. Các đường ấy cắt nhau tại X, Y, Z (xem hình vẽ dưới đây). Chứng minh rằng XYZ là tam giác đều.

Giải



Đặt $A = 3\alpha$, $B = 3\beta$, $C = 3\gamma$. Gọi các cạnh BC, CA, AB và đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là a, b, c, d tương ứng. Theo định lý hàm số sin, trong tam giác CYA ta có:

$$\frac{CY}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\left[180^0 - \alpha - \gamma\right]}. \quad (1)$$

Do $\alpha + \gamma = 60^0 - \beta$, vậy từ (1) suy ra

$$CY = b\frac{\sin\alpha}{\sin\left[120^0 + \beta\right]} = d\sin 3\beta\frac{\sin\alpha}{\sin\left(60^0 - \beta\right)}. \quad (2)$$

Ta có: $\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta = 4\sin\beta\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\beta\right]$

$= 4\sin\beta(\sin^2 60^0 - \sin^2\beta)$

$= 4\sin\beta\sin(60^0 + \beta)\sin(60^0 - \beta). \quad (3)$

Thay (3) vào (2) có: $n = CY = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin(60^0 + \alpha).$

Lý luận tương tự có: $m = CX = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin(60^0 + \beta)$

Trong tam giác CXY, áp dụng định lý hàm số cosin, ta có:

$XY^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\gamma = 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta[\sin^2(60^0 + \alpha) + \sin^2(60^0 + \beta)$

$- 2\sin(60^0 + \alpha)\sin(60^0 + \beta)\cos\gamma]. \quad (4)$

Do $(60^0 + \alpha) + (60^0 + \beta) + \gamma = 180^0$, nên xét ΔEFG với $E = 60^0 + \alpha$ $\hat{F} = 60^0 + \beta$, $\hat{G} = \gamma$. Gọi d_1 là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác này. Theo định lý hàm số sin trong tam giác này, có

$$FG = e = d_1\sin(60^0 + \alpha) \Rightarrow \sin(60^0 + \alpha) = \frac{e}{d_1},$$

$$EG = f = d_1\sin(60^0 + \beta) \Rightarrow \sin(60^0 + \beta) = \frac{f}{d_1},$$

$$EF = g = d_1\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \frac{g}{d_1}.$$

Vậy thay vào (4), ta có:

$$XY^2 = 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\frac{e^2 + f^2 - 2ef\cos\gamma}{d_1^2}$$

$$= 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\frac{g^2}{d_1^2} = 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$$

$\Rightarrow$ XY = 4dsinαsinβsinγ.

Do vai trò bình đẳng, ta cũng có XZ = ZY = 4dsinαsinβsinγ

$\Rightarrow$ XY = XZ = ZY, vậy XYZ là tam giác đều. Đó là đpcm.

Bài 7. Cho tam giác ABC. P và Q là hai điểm nằm trong ΔABC. Biết rằng AP và AQ tạo với đường phân giác của góc A các góc bằng nhau: BP, BQ cùng tạo với đường phân giác của góc B các góc bằng nhau. Chứng minh rằng CP, CQ cùng lập thành với đường phân giác của góc C các góc bằng nhau.

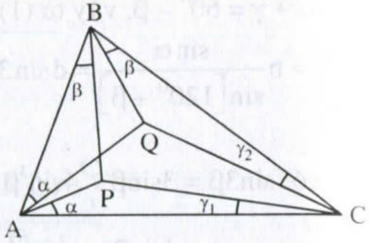
Giải

Theo giả thiết, ta có:

$\widehat{BAQ} = \widehat{PAC} = \alpha$,

$\widehat{ABP} = \widehat{QBC} = \beta$.

Đặt $\widehat{PCA} = \gamma_1$, $\widehat{QCB} = \gamma_2$.



Áp dụng định lý hàm số sin trong các ΔABP, APC, BPC, AQB, ACQ và BQC, ta có:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin\beta}{\sin(A-\alpha)};\quad \frac{CP}{AP} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}$$

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\sin(C-\gamma_1)}{\sin(B-\beta)};\quad \frac{AQ}{BQ} = \frac{\sin(B-\beta)}{\sin\alpha}$$

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(C-\gamma_2)};\quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta}.$$

Từ các đẳng thức trên suy ra:

$$\sin(C-\gamma_1)\sin\gamma_2 = \frac{BP}{CP}\sin(B-\beta)\frac{BQ}{CQ}\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\sin(C-\gamma_2)\sin\gamma_1 = \frac{AQ}{CQ}\sin(B-\alpha)\frac{AP}{CP}\sin\alpha, \qquad (2)$$

BPsinβ = Apsin(A – α), (3)

Bqsin(B – β) = AQsinα. (4)

Từ (3) và (4) suy ra

Bpsin(B – β)BQsinβ = Aqsin(A – α)APsinα. (5)

Từ (1) (2) (5) ta có: $\sin(C - \gamma_1)\sin\gamma_2 = \sin(C - \gamma_2)\sin\gamma_1$

$\Rightarrow \sin C\cos\gamma_1\sin\gamma_1 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2\cos C = \sin C\cos\gamma_2\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2\sin\gamma_1\cos C$

$\Rightarrow \sin C(\sin\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_2\cos\gamma_1) = 0$

$\Rightarrow \sin C\sin(\gamma_1 - \gamma_2) = 0.$ (*)

Do C là góc của tam giác nên sinC > 0. Vì thế từ (*) suy ra $\sin(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$

$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ (vì $|\gamma_1 - \gamma_2| < \pi$). Điều đó có nghĩa là CP, CQ tạo với đường phân giác của góc C các góc bằng nhau $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho CD = CB. Lấy E sao cho AE = AB, $\widehat{BAE} = \widehat{BCA}$ và đường thẳng AB cắt đoạn thẳng DE tại điểm M nào đó. Chứng minh rằng M là trung điểm DE khi và chỉ khi $\widehat{ACB} = 2\widehat{BAC}$.

Giải

Đặt BC = a, CA = b, AE = c, $\widehat{BAC} = A$, $\widehat{ACB} = C$.

Dễ dàng thấy rằng M là trung điểm của DE $\Rightarrow S_{AMD} = S_{AME}$.

Từ đó ta có: DM = ME $\Leftrightarrow$ AM.AdsinA = AM.AEsinC

$\Leftrightarrow (a + b)\sin A = c\sin C$

$\Leftrightarrow (\sin A + \sin B)\sin A = \sin^2 C$ (theo định lí hàm số sin)

$\Leftrightarrow \sin A\sin B + \sin^2 A = \sin^2 C$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B = (\sin C + \sin A)(\sin C - \sin A)$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B = 2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2}$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B = \sin(C + A)\sin(C - A)$

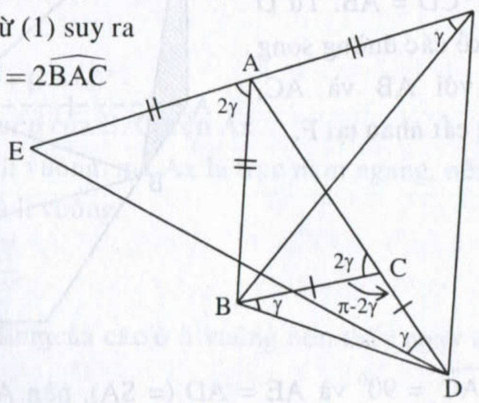
$\Leftrightarrow \sin A = \sin(C - A)$ (1)

(do sin(C + A) = sinB > 0)

Do 0 < A < π, 0 < C < π, nên từ (1) suy ra

$A = C - A \Leftrightarrow 2A = C \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 2\widehat{BAC}$

Đó là đpcm.



Bài 9. Cho hình chóp O.ABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và thỏa mãn điều kiện OB + OC = OA. Chứng minh:

$\widehat{OAB} + \widehat{OAC} + \widehat{BAC} = 90^0$.

Giải

Đặt $\widehat{OAB} = \alpha$, $\widehat{OAC} = \beta$, $\widehat{BAC} = \gamma$

Dễ thấy α, β, γ đều là góc nhọn.

Theo định lí hàm số cosin trong ΔBAC ta có:

$$\cos\gamma = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$$

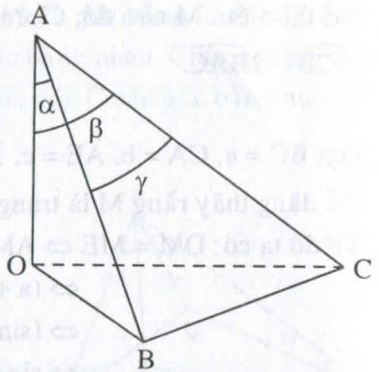
$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{OA^2 + OB^2 + OA^2 + OC^2 - (OB^2 + OC^2)}{2AB.AC}$$

$$= \frac{OA^2}{AB.AC} = \frac{OA(OB + OC)}{AB.AC}$$

$$= \frac{OA}{AC}.\frac{OB}{AB} + \frac{OA}{AB}.\frac{OC}{AC}$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \sin(\alpha + \beta) \quad (1)$$



Do $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

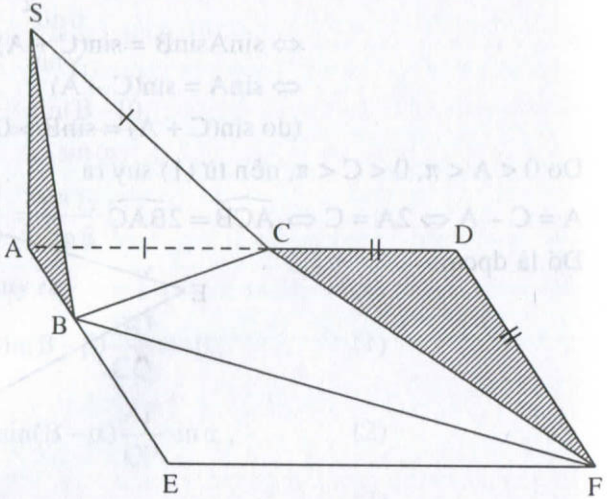
nên từ (1) suy ra $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$.

$\Rightarrow \widehat{OAB} + \widehat{OAC} + \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm.

Chú ý:

Xét cách giải bài trên bằng phương pháp thuần túy hình học như sau:

Trong đáy (ABC) kéo dài AB một đoạn BE = AC; kéo dài AC một đoạn CD = AB. Từ D và E kẻ các đường song song với AB và AC, chúng cắt nhau tại F.



Do $\widehat{BAC} = 90^0$ và AE = AD (= SA), nên ADFE là hình vuông ⇒ hai tam giác vuông SAB và FDC bằng nhau.

$\Rightarrow SB = CF$ và $\widehat{ASB} = \widehat{DFC}$

Tương tự có $SC = BF$ và $\widehat{ASC} = \widehat{BFE}$.

Từ đó dễ dàng thấy $\Delta SBC = \Delta FCB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BSC} = \widehat{BFC}$

Như vậy $\widehat{ASB} + \widehat{ASC} + \widehat{BSC} = \widehat{DFC} + \widehat{BFE} = \widehat{EFD} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm.

§5. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG CÁC BÀI TOÁN KHÁC

Trong mục này chúng tôi giới thiệu các bài toán sử dụng phương pháp lượng giác để giải các bài toán trong hình học tổ hợp và trong số học.

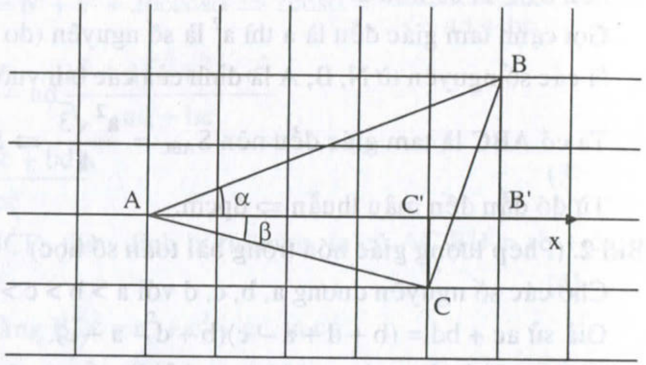
Bài 1. (Phép lượng giác hóa trong hình học tổ hợp)

Cho tờ giấy kẻ ô li. Chứng minh rằng không thể vẽ một tam giác đều sao cho các đỉnh của nó là các đỉnh của các ô li vuông.

Giải

Giả thiết phản chứng tồn tại tam giác đều ABC, sao cho các đỉnh A, B, C là các đỉnh của các ô li vuông.

Lấy A làm gốc tọa độ, kẻ trục hoành Ax là đường thẳng nằm ngang của tờ giấy và có đơn vị độ dài là cạnh của 1 ô li vuông.



Đặt $\widehat{BAx} = \alpha$, $\widehat{CAx} = \beta$ thì $\alpha + \beta = 60^0$

Gọi B′, C′ tương ứng là hình chiếu của B, C trên Ax.

Do B, C là các đỉnh của các ô li vuông, mà Ax là trục nằm ngang, nên B′, C′ cũng phải là các đỉnh của các ô li vuông.

Ta có: $\tan\alpha = \frac{BB'}{AB'}$, $\tan\beta = \frac{CC'}{AC'}$

Do B, B′, C, C′, A đều là các đỉnh của các ô li vuông nên thấy ngay tanα và tanβ là các số hữu tỉ.

Từ đó do $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$, nên $\tan(\alpha + \beta)$ là số hữu tỉ.

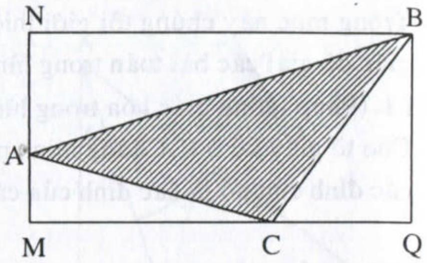
Mặt khác $\tan(\alpha + \beta) = \tan 60^0 = \sqrt{3}$ là số vô tỉ. Mâu thuẫn đó chứng tỏ giả thiết phản chứng là sai ⇒ Không tồn tại tam giác đều mà 3 đỉnh của nó là các đỉnh của ô li vuông ⇒ đpcm.

Nhận xét:

Ta có cách giải "phi lượng giác" khác như sau

Dựng hình chữ nhật "ngoại tiếp" MNBQ hình tam giác đều ABC như hình bên.

Dễ thấy N, M, Q cũng là các đỉnh của các ô li vuông, từ đó:



$S_{MNBQ} = MN.NB$; $S_{NAB} = \frac{1}{2}NB.NA$,

$S_{AMC} = \frac{1}{2}AM.MC$; $S_{BCQ} = \frac{1}{2}CQ.BQ$

là các số hữu tỉ. Vì thế do

$S_{ABC} = S_{MNPQ} - (S_{NAB} + S_{AMC} + S$

nên S_{ABC} là số hữu tỉ.

Gọi cạnh tam giác đều là a thì a^2 là số nguyên (do $a^2 = NB^2 + NA^2$ và NB, NA là các số nguyên từ N, B, A là đỉnh của các ô li vuông cạnh có thể coi là 1)

Ta có ABC là tam giác đều nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABC}$ là số vô tỉ.

Từ đó dẫn đến mâu thuẫn ⇒ đpcm.

Bài 2. (Phép lượng giác hóa trong bài toán số học)

Cho các số nguyên dương a, b, c, d với $a > b > c > d > 0$.

Giả sử $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$.

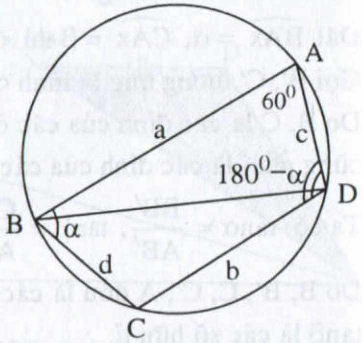
Chứng minh rằng $ab + cd$ không phải là số nguyên tố.

Giải

Theo giả thiết ta có:

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2 \quad (1)$$



Xét tứ giác ABCD với

AB = a, BC = d, CD = b, DA = c;

$\widehat{BAD} = 60^0$; $\widehat{BCD} = 120^0$.

Rõ ràng tứ giác ABCD là tồn tại.

Cụ thể ta sẽ dựng nó như sau:

Dựng ΔBAC với AB = a; AD = c và $\widehat{BAD} = 60^0$. Vẽ đường tròn ngoại tiếp ΔABD. Về phía đối diện với đỉnh A, đặt dây cung BC = d. ABCD là tứ giác cần tìm. Thật vậy, do ABCD là tứ giác nội tiếp mà $\widehat{BAD} = 60^0$ nên suy ra $\widehat{BCD} = 120^0$. Còn lại ta sẽ chứng minh CD = b.

Áp dụng định lý hàm số cosin trong hai tam giác BAD và BCD, ta có:

$$BD^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{BAD} = CD^2 + BC^2 - 2d.DC\cos 120^0.$$

Suy ra: $a^2 + c^2 - ac = d^2 + CD^2 + d.DC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$b^2 + bd + d^2 = d^2 + CD^2 + d.DC \Leftrightarrow b^2 + bd = CD^2 + d.DC$$

$$\Leftrightarrow (b - CD)(b + CD) = d(CD - b)$$

$$\Leftrightarrow (b - CD)(b + d + CD) = 0$$

$$\Leftrightarrow CD = b$$

Như vậy ABCD là tứ giác hoàn toàn xác định.

Đặt $\widehat{ABC} = \alpha \Rightarrow \widehat{ADC} = 180^0 - \alpha$.

Áp dụng định lí hàm số cosin trong hai tam giác ABC và ACD, ta có:

$$AC^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^0 - \alpha)$$

Suy ra: $a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$

Từ đó ta có: $AC^2 = a^2 + d^2 - ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$

hay $$AC^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \quad (3)$$

Trong tứ giác nội tiếp ABCD, theo định lí Ptoleme, ta có AC.BD = ab + cd,

hay: $AC^2.BD^2 = (ab + cd)^2 \quad (4)$

Thay (3) vào (4) và để ý rằng $BD^2 = a^2 + c^2 - ac$, ta có:

$$\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}(a^2 + c^2 - ac) = (ab + cd)^2,$$

hay $(ac + bd)(a^2 + c^2 - ac) = (ab + cd)(ad + bc) \quad (5)$

Theo giả thiết, ta có: a > b > c > d. Từ đó đi đến:

$$\begin{cases}(a - d)(b - c) > 0\\(a - b)(c - d) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab + cd > ac + bd\\ac + bd > ad + bc\end{cases}$$

Như vậy ta được bất đẳng thức sau: $ab + cd > ac + bd > ad + bc \quad (6)$

Chú ý rằng ab + cd, ac + bd, ad + bc đều là số nguyên dương và từ (6) suy ra nói riêng ac + bd > 1.

Giải thiết phản chứng kết luận của bài toán không đúng, tức là ab + cd là số nguyên tố. Kết hợp với ac + bd > 1, ta có:

$(ab + cd, ac + bd) = 1 \quad (7)$

Từ (5) suy ra: $(ab + cd)(ad + bc) \vdots (ac + bd) \quad (8)$

Bây giờ từ (7) và (8) và theo tính chất chia hết ta có:

$(ad + bc) \vdots (ac + bd) \quad (9)$

Theo (6) thì ad + bc < ac + bd. Vì vậy từ (9) suy ra điều vô lí. Điều đó chứng tỏ rằng giả thiết phản chứng là sai, vậy ab + cd không phải là số nguyên tố.

§6. HỆ THỨC THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Trong các phần trên ta đã xét các bài toán về đẳng thức lượng giác, bất đẳng thức lượng giác trong tam giác. Trong mục này xét một vài bài toán về hệ thức lượng giác trong tam giác, trong đường tròn và trong hình học không gian.

Bài 1. Cho ABCD là tứ giác lồi và không có góc nào vuông. Chứng minh

$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\tan A\tan B\tan C\tan D}=\cot A+\cot B+\cot C+\cot D.$$

Giải

Xét hai khả năng sau:

1. $A+B\neq 90^0$ (hoặc $A+B\neq 270^0$), khi đó $\tan(A+B)$ và $\tan(C+D)$ có nghĩa.

Vì $(A+B)+(C+D)=360^0$, nên

$$\tan(A+B)+\tan(C+D)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\frac{\tan C+\tan D}{1-\tan C\tan D}=0$$

$$\Leftrightarrow (\tan A+\tan B)(1-\tan C\tan D)+(\tan C+\tan D)(1-\tan A\tan B)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C+\tan D$$

$$=\tan A\tan B\tan C+\tan A\tan C\tan D+\tan B\tan C\tan D+\tan A\tan B\tan D$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\tan A\tan B\tan C\tan D}=\frac{1}{\tan D}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$$

$$=\cot A+\cot B+\cot C+\cot D$$

2. $A+B=90^0$ $(C+D=270^0)$

Do $C+D=270^0$ và ABCD là tứ giác lồi không có góc nào vuông nên suy ra $90^0<D<180^0$ (vì nếu $D<90^0\Rightarrow C>180^0$ đó là điều kiện mâu thuẫn với tính lồi của ABCD).

Do $A+B=90^0\Rightarrow 0<A<90^0\Rightarrow 90^0<A+D<270^0$

Áp dụng phần 1/ với $A+D$ và $B+C$ suy ra đpcm.

Bài 2.

Cho ABCD là tứ giác vừa nội tiếp, vừa ngoại tiếp. Gọi S và p tương ứng là diện tích và nửa chu vi của tứ giác. Chứng minh:

$$S=p^2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\right).$$

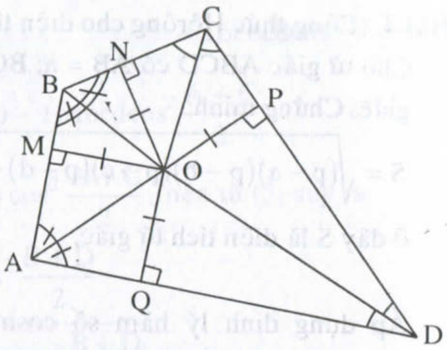
Giải

Gọi O là tâm hình tròn nội tiếp của tứ giác và r là bán kính của nó.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, BC, CD, DA.

Ta có: $p=AM+BN+CP+DQ$

$$=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{D}{2}\right)\quad(1)$$



Vì ABCD là tứ giác nội tiếp nên ta có:

$A+C=B+D=180^0$

$$\Rightarrow \frac{A}{2}+\frac{C}{2}=\frac{B}{2}+\frac{D}{2}=90^0$$

$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}=\tan\frac{C}{2};\ \cot\frac{B}{2}=\tan\frac{D}{2};$$

$$\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A}{2};\ \cot\frac{D}{2}=\tan\frac{B}{2}$$

Thay vào (1) và có:

$$p=r\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\right)\quad(2)$$

Vì $S=pr$, nên từ (2) suy ra

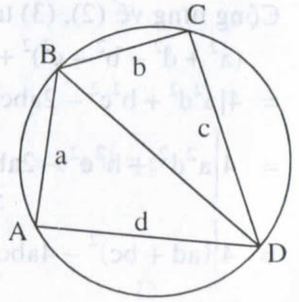
$$S=p^2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\right)\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 3. Cho ABCD là tứ giác nội tiếp với $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

Giải

Áp dụng định lý hàm số cosin trong các tam giác ABD và BCD, ta có:



$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A$

$$=b^2+c^2-2bc\cos C=b^2+c^2+2bc\cos A$$

(do $A+C=180^0$)

Từ đó suy ra

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2bc+2ad}\quad(1)$$

Từ (1) đi đến

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{b^2+c^2+2bc+2ad-a^2-d^2}{a^2+d^2-b^2-c^2+2bc+2ad}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{(a+d)^2-(b-c)^2}} = \sqrt{\frac{(b+c+a-d)(b+c+d-a)}{(a+d+b-c)(a+d+c-b)}} \quad (2)$$

Vì $a + b + c + d = 2p$, nên từ (2) ta có: $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}} \Rightarrow$ đpcm.

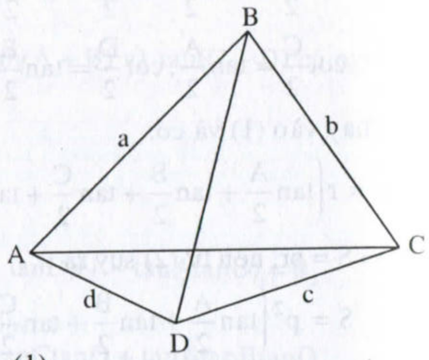
Bài 4. (Công thức Hêrông cho diện tích tứ giác)

Cho tứ giác ABCD có $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$ và p là nửa chu vi tứ giác. Chứng minh:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}},$$

ở đây S là diện tích tứ giác.

Giải



Áp dụng định lý hàm số cosin trong các tam giác ABD và CBD ta có:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$

$$\Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos A - 2bc\cos C \quad (1)$$

Bình phương hai vế của (1) và có

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad\cos A - bc\cos C)^2 \quad (2)$$

Ta có $S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin C$

$$\Rightarrow 16S^2 = 4(ad\sin A + bc\sin C)^2 \quad (3)$$

Cộng từng vế (2), (3) ta được:

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 16S^2 = 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A\cos C - \sin A\sin C)]$$
$$= 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos(A + C)]$$
$$= 4\left[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\left(2\cos^2\frac{A+C}{2} - 1\right)\right]$$
$$= 4\left[(ad+bc)^2 - 4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\right] \quad (4)$$

Từ (4) suy ra

$$16S^2 = 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)]$$

$$- 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$= [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$= (a + d + b - c)(a + d + c - b)(b + c + a - d)(b + c + d - a)$$
$$- 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$= (2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2d)(2p - 2a) - 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2} \quad (5)$$

Vì $\frac{A+C}{2} + \frac{B+D}{2} = 180^0 \Rightarrow \cos^2\frac{B+D}{2} = \cos^2\frac{A+C}{2}$, nên từ (5) suy ra

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Nhận xét:

1. Ta biết rằng với tam giác có công thức Hêrông quen biết để tính diện tích tam giác

   $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

   ở đây a, b, c là ba cạnh của tam giác, còn p là nửa chu vi của nó.

   Chính vì thế công thức và chứng minh ở trên gọi là công thức Herong suy rộng để tính diện tích tứ giác.

2. Xét một vài trường hợp đặc biệt sau:

   a. Nếu ABCD là tứ giác nội tiếp. Khi đó $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 180^0$

   $\Rightarrow \cos\frac{B+D}{2} = 0$. Trong trường hợp này ta có:

   $$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

   b. Nếu ABCD là tứ giác ngoại tiếp. Khi đó ta có $a + c = b + d = p$

   $\Rightarrow p - a = c, p - b = d, p - c = a, p - d = b.$

   Trong trường hợp này ta có:

   $$S = \sqrt{abcd - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}} = \sqrt{abcd\sin^2\frac{B+D}{2}} = \sin\frac{B+D}{2}\sqrt{abcd}.$$

   c. Nếu ABCD vừa là tứ giác nội tiếp và ngoại tiếp, thì do $\sin\frac{B+D}{2} = 1$, nên ta có: $S = \sqrt{abcd}$.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD thỏa mãn điều kiện

$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$.

Chứng minh: $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = 0$.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} = 0 \qquad (1)$$

Vì $A + B + C + D = 360^0 \Rightarrow \frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2} = 180^0$, nên từ (1) có:

$$\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C-D}{2}\right) = 0 \qquad (2)$$

Lại có $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = \dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B} + \dfrac{\sin(C+D)}{\sin C\sin D}$

$$= \sin(A+B)\left[\frac{1}{\sin A\sin B} - \frac{1}{\sin C\sin D}\right] = 0 \qquad (3)$$

(do $(A+B) + (C+D) = 360^0 \Rightarrow \sin(A+B) = -\sin(C+D)$)

Từ (2) suy ra chỉ có hai khả năng:

1. Nếu $\cos\frac{A+B}{2} = 0 \Rightarrow \sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 0$

Vậy từ (3) có $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = 0$

2. Nếu $\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C-D}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C-D}{2}$

Khi đó:

a. Nếu $\frac{A-B}{2} = \frac{C-D}{2} \Rightarrow A - B = C - D$

$\Rightarrow A + D = B + C = 180^0$

$\Rightarrow \sin A = \sin D; \sin B = \sin C$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sin A\sin B} - \dfrac{1}{\sin C\sin D} = 0$

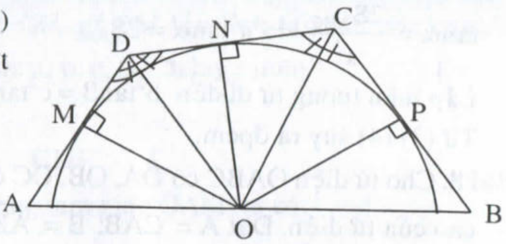
Từ (3) suy ra đpcm.

b. Nếu $\frac{A-B}{2} = -\frac{C-D}{2}$.

Lập luận như phần a/ cũng suy ra đpcm.

Bài 6. Cho tứ giác ABCD nội tiếp. Đường tròn với tâm trên cạnh AB tiếp xúc với ba cạnh kề. Chứng minh: $AD + BC = AB$.

Giải



Gọi O là tâm đường tròn ($O \in AB$) tiếp xúc với AD, DC, CB lần lượt tại M, N, P. Ta có:

$AB = OA + OB$

$$= R\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}\right). \qquad (1)$$

$AD = AM + MD = R\cot A + R\cot\frac{D}{2}$

$BC = BP + PC = R\cot B + R\cot\frac{C}{2}$

$$\text{Từ đó } AD + BC = R\left(\cot A + \cot\frac{C}{2}\right) + R\left(\cot B + \cot\frac{D}{2}\right)$$

$$= R\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1+\cos C}{\sin C}\right) + R\left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{1+\cos D}{\sin D}\right) \qquad (2)$$

Do ABCD là tứ giác nội tiếp nên $A + C = B + D = 180^0$.

$\Rightarrow \sin A = \sin C; \sin B = \sin D; \cos A = -\cos C; \cos B = -\cos D$

Vì vậy từ (2) suy ra:

$$AD + BC = R\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1-\cos A}{\sin A}\right) + R\left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{1-\cos B}{\sin B}\right)$$

$$= R\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}\right) \qquad (3)$$

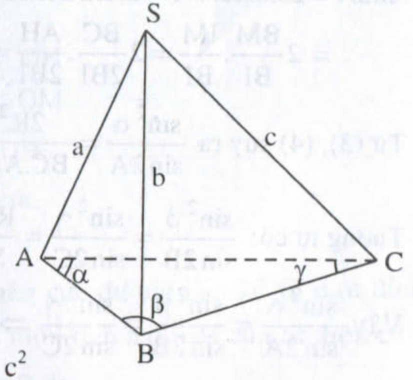
Từ (1), (3) suy ra đpcm.

Bài 7. Tứ diện S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

Giả sử $\widehat{BAC} = \alpha$; $\widehat{ABC} = \beta$; $\widehat{ACB} = \gamma$; $SA = a$; $SB = b$; $SC = c$.

Chứng minh: $a^2\tan\alpha = b^2\tan\beta = c^2\tan\gamma$.

Giải



Theo định lí hàm số cotang trong tam giác ABC, ta có:

$$\cot\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{4S_{ABC}}{AB^2 + AC^2 - BC^2} \qquad (1)$$

Theo định lí Pitago, ta có:

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - b^2 - c^2$$

$$= 2a^2 \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) và có:

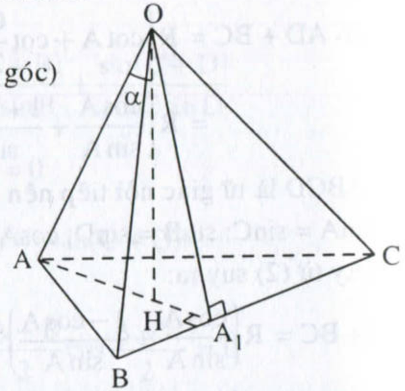
$$\tan\alpha = \frac{2S_{ABC}}{a^2} \Rightarrow a^2\tan\alpha = 2S_{ABC} \qquad (3)$$

Lập luận tương tự đi đến $b^2\tan\beta = c^2\tan\gamma = 2S_{ABC}$ (4)

Từ (3) (4) suy ra đpcm.

Bài 8. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Vẽ chiều cao của tứ diện. Đặt $A = \widehat{CAB}$; $B = \widehat{ABC}$; $C = \widehat{BCA}$; $\alpha = \widehat{AOH}$; $\beta = \widehat{BOH}$; $\gamma = \widehat{COH}$. Chứng minh: $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin 2C}$.

Giải



Kẻ OH ⊥ (ABC) ⇒ H là trực tâm tam giác ABC.

$AH \cap BC = A_1$, thì $AA_1 \perp BC$

Từ đó $OA_1 \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc)

Trong tam giác vuông AOA_1, ta có:

$OA^2 = AH.AA_1$ (1)

Ta có: $\sin^2\alpha = \dfrac{AH^2}{OA^2}$ (2)

Thay (1) vào (2) và có:

$\sin^2\alpha = \dfrac{AH}{AA_1}$ (3)

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, và gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác này. Khi đó H, I, G thẳng hàng, ở đây G là trọng tâm tam giác (theo đường thẳng Euler). Ta cũng có:

HG = 2GI ⇒ AH = 2IM (M là trung điểm cạnh BC)

Ta có: $\widehat{A} = \widehat{CAB} = \widehat{BIM}$,

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2.\sin\widehat{BIM}\cos\widehat{BIM}$$

$$= 2\frac{BM}{BI}.\frac{IM}{BI} = 2\frac{BC}{2BI}.\frac{AH}{2BI} = \frac{BC.AH}{2R^2} \qquad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{2R^2}{BC.AA_1} = \dfrac{R^2}{S}$, ở đây $S = S_{ABC}$.

Tương tự có: $\dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin 2C} = \dfrac{R^2}{S}$

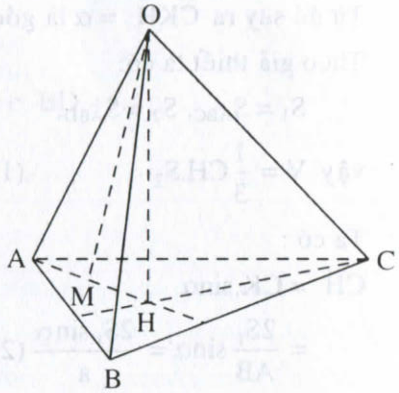
Vậy $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin 2C} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 9. Cho hình chóp tam giác đều O.ABC có các cạnh bên tạo với đáy góc α. M là điểm trên mặt phẳng đáy. Giả sử OM lần lượt tạo với các cạnh OA, OB, OC và đường cao OH các góc a, b, c, β. Chứng minh:

cosa + cosb + cosc = 3sinαcosβ.

Giải

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác OAM, ta có:



$$AM^2 = OA^2 + OM^2 - 2OA.OM\cos a$$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{OA^2 + OM^2 - AM^2}{2.OA.OM} \qquad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\cos b = \frac{OB^2 + OM^2 - BM^2}{2.OB.OM} \qquad (2)$$

$$\cos c = \frac{OC^2 + OM^2 - CM^2}{2.OC.OM} \qquad (3)$$

Vì OA = OB = OC (do O.ABC là chóp đều), nên ta có sau khi cộng từng vế (1) (2) (3):

$$\cos a + \cos b + \cos c = \frac{3OA^2 + 3OM^2 - (MA^2 + MB^2 + MC^2)}{2.OA.OM} \qquad (4)$$

Áp dụng công thức Lepnhit với tam giác ABC, ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MH^2 + HA^2 + HB^2 + HC^2, \qquad (5)$$

(chú ý ở đây H cũng chính là trọng tâm tam giác ABC, do ABC là tam giác đều và O.ABC là chóp đều nên đường cao H chính là tâm của đáy ABC).

Vì $HA^2 = HB^2 = HC^2 = OA^2 - OH^2$; $MH^2 = OM^2 - OH^2$, nên từ (5) có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3OM^2 - 3OH^2 + 3OA^2 - 3OH^2 \qquad (6)$$

Thay (6) vào (4) và có:

$$\cos a + \cos b + \cos c = \frac{2OH^2}{OA.OM} = 3\frac{OH}{OA}.\frac{OH}{OM}$$

$$= 3\sin\widehat{OAH}.\cos\widehat{MOH}$$

$$= 3\sin\alpha\cos\beta \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Bài 10.

1. Cho tứ diện ABCD có AB = a và chân các đường cao kẻ từ một đỉnh nằm bên trong mặt đối diện. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai mặt của tứ diện có chung cạnh a và α là góc nhị diện giữa hai mặt ấy.

Gọi V là thể tích của tứ diện. Chứng minh: $V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

2. Chứng minh rằng trong tứ diện, tích của các cặp đối diện chia cho tích của sin các nhị diện của từng cặp cạnh đó là bằng nhau.

Giải

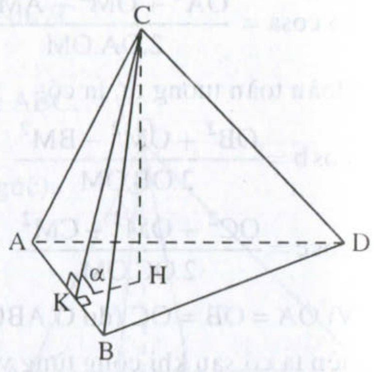
1. Kẻ CH ⊥ (ADB) và CK ⊥ AB (định lí ba đường vuông góc).

Từ đó suy ra $\widehat{CKH} = \alpha$ là góc phẳng nhị diện cạnh AB.

Theo giả thiết ta có:

$S_1 = S_{ABC}, S_2 = S_{ABD}$,

vậy $V = \frac{1}{3}CH.S_2$ (1)



Ta có:

$CH = CK.\sin\alpha$

$= \frac{2S_1}{AB}\sin\alpha = \frac{2S_1\sin\alpha}{a}$ (2)

Thay (2) vào (1), suy ra

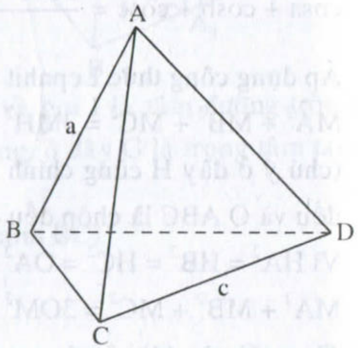
$V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a} \Rightarrow$ đpcm.

2. Giả sử AB = a; CD = c, α là góc nhị diện cạnh AB, β là góc nhị diện cạnh CD.

Đặt $S_1 = S_{ABC}, S_2 = S_{ABD}$

$S_3 = S_{BCD}, S_4 = S_{ACD}$.

Theo phần 1 nếu gọi V là thể tích tứ diện ABCD, ta có:



$$V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a} = \frac{2S_3S_4\sin\beta}{3c}$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{4S_1S_2S_3S_4\sin\alpha\sin\beta}{9ac}$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2} \quad (3)$$

Vì vế phải của (3) là biểu thức hoàn toàn bình đẳng với các cạnh và sin của các góc nhị diện tương ứng, nên nó là giá trị chung cho tỉ số của tích các cặp cạnh đối của tứ diện với các sin của các nhị diện của từng cặp cạnh đối đó ⇒ đpcm.

Bài 11. Cho tứ diện ABCD. Kí hiệu a, b, c, d, e, f là độ dài các cặp cạnh đối diện của nó và α, β, γ, δ, θ, ω tương ứng là các góc nhị diện của các cạnh của tứ diện. Giả sử

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\beta};\ \frac{b}{\sin\gamma} = \frac{d}{\sin\beta};\ \frac{e}{\sin\theta} = \frac{f}{\sin\omega}.$$

Chứng minh rằng ABCD là tứ diện gần đều (tức là tứ diện có các cạnh đối diện bằng nhau).

Giải

Giả sử AB = a, CD = c, BC = b, AD = d, AC = e, BD = f.

Theo thí dụ 5, ta có:

$$V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{2S_1S_2}{3V}, \quad (1)$$

tương tự có $\frac{c}{\sin\beta} = \frac{2S_3S_4}{3V}$ (2)

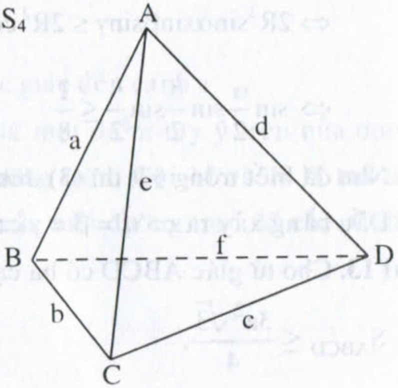
ở đây $S_1 = S_{CAB}; S_2 = S_{DAB}; S_3 = S_{ACD}; S_4 = S_{BCD}$.

Từ (1) (2) có: $\frac{2S_1S_2}{3V} = \frac{2S_3S_4}{3V} \Rightarrow S_1S_2 = S_3S_4$

Hoàn toàn tương tự từ

$\frac{b}{\sin\gamma} = \frac{d}{\sin\delta} \Rightarrow S_1S_3 = S_2S_4$

$\frac{e}{\sin\theta} = \frac{f}{\sin\omega} \Rightarrow S_1S_4 = S_2S_3$.



Từ (3) (4) (5) có hệ sau: $\begin{cases} S_1S_2 = S_3S_4 \\ S_1S_3 = S_2S_4 \\ S_1S_4 = S_2S_3 \end{cases}$

Dễ thấy từ đó ta có: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \Rightarrow a = c; b = d; e = f$

Vậy ABCD là tứ diện gần đều ⇒ đpcm.

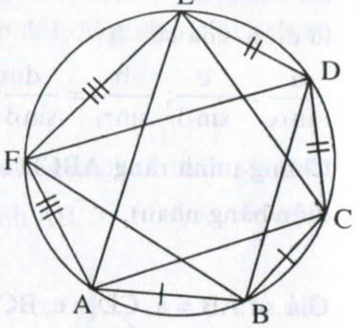
Bài 12. Cho ABCDEF là lục giác nội tiếp trong một đường tròn và thỏa mãn điều kiện AB = BC; CD = DE; EF = FA. Chứng minh rằng: $S_{ACE} \le S_{BDF}$.

Giải

Giả sử $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \alpha$, $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \beta$, $\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA} = \gamma$, thì

$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^0$,

$\widehat{AEC} = \alpha$, $\widehat{EAC} = \beta$, $\widehat{ECA} = \gamma$.



Tam giác ACE có đường tròn ngoại tiếp chính là đường tròn ngoại tiếp lục giác ABCDEF. Gọi R là bán kính của đường tròn này, thì

$S_{AEC} = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad (1)$

Tam giác BDF có

$$\widehat{FBD} = \frac{\beta+\gamma}{2};\ \widehat{FDB} = \frac{\gamma+\alpha}{2};\ \widehat{BFD} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

nên $S_{BDF} = 2R^2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$= 2R^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \qquad (2)$$

(do $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$).

Vì thế $S_{ACE} \le S_{BDF}$

$$\Leftrightarrow 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le 2R^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8} \qquad (3)$$

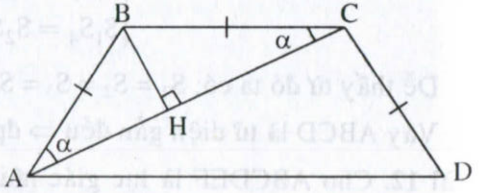
Như đã biết trong §3, thì (3) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ $\alpha = \beta = \gamma$ ⇔ ABCDEF là lục giác đều.

Bài 13. Cho tứ giác ABCD có ba cạnh AB = BC = CD = a. Chứng minh:

$$S_{ABCD} \le \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Giải



Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ACD} = \beta$.

Khi đó $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \qquad (1)$

Kẻ BH ⊥ AC, thì từ (1) có:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BH + \frac{1}{2}AC.CD.\sin\beta$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} \le AH.BH + AH.CD \qquad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra ⇔ $\sin\beta = 1$ ⇔ $\beta = 90^0$.

Có thể viết lại (2) dưới dạng sau

$S_{ABCD} \le a\cos\alpha.a\sin\alpha + a^2\cos\alpha$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le a^2\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$

$$\Rightarrow S^2_{ABCD} \le a^4\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)^2 \qquad (3)$$

Vì $\cos^2\alpha(1 + \sin\alpha)^2 = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)^3$

$$= \frac{1}{3}(3 - 3\sin\alpha)(1 + \sin\alpha)^3 \qquad (4)$$

Do $3 - 3\sin\alpha > 0$, $1 + \sin\alpha > 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt[4]{(3-3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}$$

$$\le \frac{(3-3\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)}{4} = \frac{3}{2} \qquad (5)$$

Thay vào (4), (3) ta có:

$$S^2_{ABCD} \le a^4\frac{27}{16} \Leftrightarrow S_{ABCD} \le \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng trong (2) và (5) tức là khi và chỉ khi hệ sau thỏa mãn

$$\begin{cases}\beta = 90^0\\ 3-3\sin\alpha = 1+\sin\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 90^0\\ \alpha = 30^0\end{cases}$$

⇔ ABCD là nửa lục giác đều cạnh a.

Bài 14. Cho nửa đường tròn bán kính R. C là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn. Trong hai hình quạt nội tiếp hai đường tròn. Gọi M và N là hai tiếp điểm của hai đường tròn với đường kính của nửa đường tròn đã cho. Chứng minh rằng: $MN \ge 2R\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Giải

Gọi O_1, O_2 là tâm của hai đường tròn.

Đặt $\widehat{CON} = 2\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi 2}{}\right)$, $O_1M = R_1$, $O_2N = R_2$.

Ta có: $\widehat{O_2ON} = \alpha$, $\widehat{O_1OM} = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

vậy $MN = MO + ON = R_1\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + R_2\cot\alpha = R_1\tan\alpha + R_2\cot\alpha$.

Trong Δ vuông O_1MO có:

$$R_1 = O_1O\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (R - R_1)\cos\alpha$$

$\Rightarrow R_1(1 + \cos\alpha) = R\cos\alpha$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{R\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

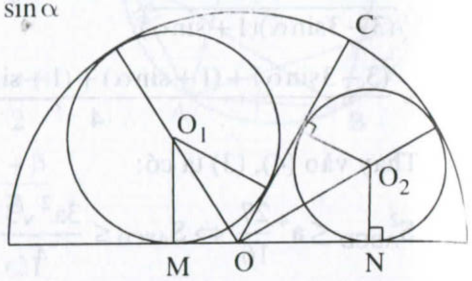
Tương tự $R_2 = OO_2\sin\alpha = (R - R_2)\sin\alpha$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

$$\text{Vậy } MN = \frac{R\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{R\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{R\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

$$= R\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}$$



$$= R\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= R\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{2R}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}$$

Do $\sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$ (vì $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$)

$\Rightarrow MN \ge \dfrac{2R}{\sqrt{2}+1}$ nên $MN \ge 2R\left(\sqrt{2}-1\right) \Rightarrow$ đpcm.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow OC \perp MN$.

Bài 15. Cho ABCD là tứ diện gần đều (tức là có các cặp cạnh đối diện bằng nhau), với AB = CD = a; AD = BC = b; AC = BD = c. Chứng minh rằng:

$\dfrac{1}{b^2c^2} + \dfrac{1}{c^2a^2} + \dfrac{1}{a^2b^2} \le \dfrac{9}{S^2}$, ở đây S là diện tích toàn phần của tứ diện.

Giải

Dễ thấy $S_{ABC} = S_{BCD} = S_{ACD} = S_{ABD} = \dfrac{S}{2}$, ngoài ra

$\Delta ABC = \Delta DCB = \Delta CDA = \Delta BAD$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, thì

$S_{ABC} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

$\Rightarrow S = 8R^2\sin A\sin B\sin C$,

ở đây A, B< C là ba góc của tam giác ABC.

Theo định lí hàm số sin, ta đưa bất đẳng thức đã cho về dạng tương đương sau:

$$\frac{1}{16R^4\sin^2 B\sin^2 C} + \frac{1}{16R^4\sin^2 C\sin^2 A} + \frac{1}{16R^4\sin^2 A\sin^2 B} \le \frac{9}{64R^4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C \le \frac{9}{4}.$$

Theo bất đẳng thức cơ bản trong tam giác suy ra (1) đúng, đó là đpcm.

Dấu bằng xảy ra trong (1) ⇔ ABC là tam giác đều.

Vậy dấu bằng trong bất đẳng thức đã cho xảy ra⇔ ABCD là tứ diện đều.

MỤC LỤC

Chương 1. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. Các công thức lượng giác cơ bản 3
§2. Đẳng thức lượng giác không điều kiện 5
§3. Đẳng thức lượng giác có điều kiện 32

Chương 2. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. Bất đẳng thức lượng giác không điều kiện 48
§2. Bất đẳng thức lượng giác có điều kiện 73

Chương 3. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

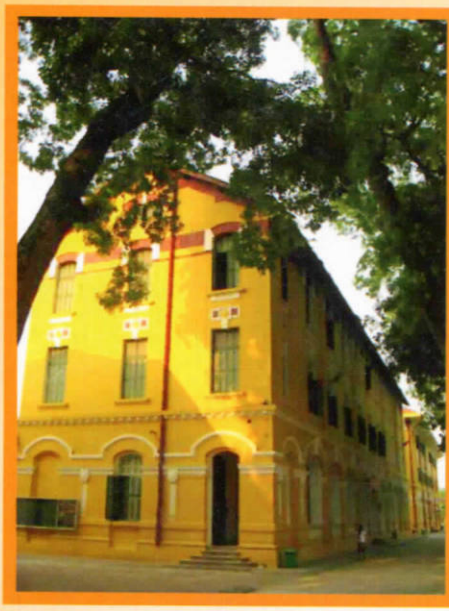
§1. Đẳng thức lượng giác không điều kiện 83
§2. Đẳng thức lượng giác có điều kiện 171
  A. Điều kiện cho dưới dạng hệ thức đại số hoặc hệ thức lượng giác 171
  B. Điều kiện cho dưới dạng yếu tố hình học 202
§3. Đẳng thức lượng giác trong tam giác cân 212
§4. Sử dụng đẳng thức lượng giác để nhận dạng tam giác cân 216
§5. Đẳng thức lượng giác trong tam giác vuông 229
§6. Sử dụng đẳng thức lượng giác để nhận dạng tam giác vuông 247
§7. Sử dụng đẳng thức lượng giác để nhận dạng tam giác đều 263

Chương 4. BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

§1. Bất đẳng thức lượng giác không điều kiện 274
  A. Các bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác 274
  B. Bất đẳng thức lượng giác trong các bài toán hình học phẳng 278
  C. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác thường 342
    1. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản trong tam giác 342
    2. Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức kinh điển 352
    3. Phương pháp sử dụng biến đổi lượng giác 373
    4. Vài phương pháp khác chứng minh bất đẳng thức lượng giác 380
§2. Bất đẳng thức lượng giác có điều kiện 389
  A. Điều kiện cho dưới dạng hệ thức hoặc hệ thức lượng giác 389
  B. Điều kiện cho dưới dạng hình học 403
§3. Bất đẳng thức lượng giác trong các tam giác có cấu trúc đặc biệt 407
  A. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác vuông 407
  B. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác nhọn hoặc tam giác không có góc tù 412
  C. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác không nhọn 442

Chương 5. VÀI ỨNG DỤNG CỦA LƯỢNG GIÁC TRONG VIỆC GIẢI CÁC BÀI TOÁN SƠ CẤP

§1. Phương pháp lượng giác hóa trong các bài toán bất đẳng thức về tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số 453
§2. Phương pháp lượng giác hóa trong các bài toán chứng minh đẳng thức 464
§3. Phương pháp lượng giác hóa trong các bài toán giải phương trình 470
§4. Phương pháp lượng giác hóa trong các bài toán hình học 476
§5. Phương pháp lượng giác hóa trong các bài toán khác 485
§6. Hệ thức lượng giác trong các bài toán hình học 488



www.nhasachkhangviet.vn

TRƯỜNG TRUNG HỌC QUỐC GIA CHU VĂN AN

CÔNG TY TNHH MỘT THÀNH VIÊN DVVH KHANG VIỆT

Nhà Sách **KHANG VIỆT**

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đakao - Quận 1 - Tp.Hồ Chí Minh
Điện thoại: (08) 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: (08) 39110880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

90°
120°
60°
135°
45°
150°
30°
180°
0°
0
(1,0)

8 935092 525440

Giá: 115.000